令 和 8 年 度 入 学 者 選 抜 試 験

問題用紙 (工学部・生命環境学部 数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ・C)

1 (1) 数列 $\{a_n\}$ は，その階差数列が等比数列であり，$a_1=2$，$a_2=5$，$a_3=11$ を満たす。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2$ を求めよ。

(2) 複素数平面上の点 z が虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{3z}{z+1}$ で表される点 w は，どのような図形を描くか。

(3) すべての正の実数 x，y に対し

$$kx^2-xy+4ky^2 \geqq 0$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

2 s を $0<s<1$ を満たす実数とする。△OAB について，辺 OA の長さを s，辺 OB の長さを $1-s$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とする。また，$\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線と辺 AB との交点を C とする。点 B から直線 OC に下ろした垂線と直線 OC との交点を H とし，直線 BH と直線 OA との交点を D とする。また，点 C から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，s を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，s，$\cos\theta$ を用いて表せ。

(3) 点 H が線分 OC を $3:1$ に内分し，点 E が辺 OA を $1:3$ に内分しているとき，$\cos\theta$ の値を求め，△OAB の面積を求めよ。

3 原点を O とする xy 平面において，x 軸の正の部分に点 A が，y 軸の正の部分に点 B があり，$\mathrm{AB}=1$ を満たしている。$\angle\mathrm{OAB}=\theta$ とし，p を $0<p<1$ を満たす実数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 AB の方程式を，$\sin\theta$，$\tan\theta$ を用いて表せ。

(2) $f(t)=-p\tan t+\sin t$ とする。$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ における関数 $f(t)$ の最大値を p の式で表せ。

(3) 点 A が x 軸の正の部分を，点 B が y 軸の正の部分を $\mathrm{AB}=1$ を満たしながら動くとき，線分 AB が通過する領域を D とする。p に対して，点 (p,q) が D に属するような最大の実数 q を $g(p)$ とするとき，関数 $y=g(x)$ $(0<x<1)$ のグラフの概形をかけ。

4 t を $t>2$ を満たす実数とする。関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)$ に対し，xy 平面上の曲線 $y=2t-f(x)$ を C_1，$y=t+f(x)$ を C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 つの交点 P，Q をもつ。P，Q の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) 点 Q の座標を t の式で表せ。

(3) 曲線 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S を t の式で表せ。

(4) t が 3 から 4 まで変化するとき，点 Q が描く曲線の長さ L を求めよ。

受 験 番 号

令和８年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲ・Ｃその１ ）

1 (1) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とおき，数列 $\{b_n\}$ の公比を r とおく。$a_2 = a_1 + b_1$ であるので $b_1 = 3$ を得る。また，$b_2 = rb_1 = 3r$ に注意すれば，$a_3 = a_2 + b_2 = a_2 + 3r$ であるので，$r = 2$ を得る。よって，$b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ であるので，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{k-1}$$

となり

$$a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \quad \cdots (*)$$

を得る。$(*)$ は $n = 1$ のときにも成り立つ。したがって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(9 \cdot 4^{k-1} - 6 \cdot 2^{k-1} + 1\right) = 3 \cdot 4^n - 6 \cdot 2^n + n + 3$$

となる。

---

(2) $w = \dfrac{3z}{z+1}$ より $z = \dfrac{w}{3-w}$ $(w \neq 3)$ を得る。z が虚軸上を動くとき $z + \overline{z} = 0$ であるので

$$\frac{w}{3-w} + \frac{\overline{w}}{3-\overline{w}} = 0 \quad \cdots (*)$$

を得る。$(*)$ を整理すると

$$w\overline{w} - \frac{3}{2}w - \frac{3}{2}\overline{w} = 0$$

となり，よって

$$\left(w - \frac{3}{2}\right)\left(\overline{w} - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

を得る。ゆえに

$$\left|w - \frac{3}{2}\right|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

であるので，すなわち

$$\left|w - \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

を得る。したがって，点 w は点 $\dfrac{3}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円を描く。ただし，点 3 は除く。

---

(3) 与式を変形すれば，すべての正の実数 x, y に対し

$$\frac{xy}{x^2 + 4y^2} \leqq k$$

を満たす実数 k の最小値を求めればよいことがわかる。よって $x, y > 0$ のとき

$$\frac{xy}{x^2 + 4y^2}$$

の最大値を求めればよい。ここで相加平均と相乗平均の大小関係を用いれば

$$\begin{aligned} \frac{xy}{x^2 + 4y^2} &= \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{4y}{x}} \\ &\leqq \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{4y}{x}}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

を得る。等号は $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4y}{x}$ より，$x = 2y$ で成立する。よって，求める実数 k の最小値は $\dfrac{1}{4}$ となる。

受　験　番　号

小　　計

数　　学　そ　の　１
工　学　部・生命環境学部

令和８年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲ・Ｃその２ ）

2

(1) 直線 OC は $\angle$AOB の二等分線であり，線分 BD と垂直なので $\triangle$OBD は OB $=$ OD の二等辺三角形となる（$\triangle$OBH と $\triangle$ODH は一辺とその両端の角の大きさがそれぞれ等しいので合同)。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{1-s}{s}\vec{a}$ であり，点 H は BD の中点であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\vec{b} + \dfrac{1-s}{s}\vec{a}}{2} = \frac{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}}{2s}$$

である。

(2) 三角形において頂角の二等分線は，対辺をその角を挟む辺の長さの比に分けるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$$

である。また，E は OA 上の点なので，ある実数 r があって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = r\overrightarrow{\mathrm{OA}} = r\vec{a}$ とおける。$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が垂直なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(r\vec{a} - \left\{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\right\}\right)\cdot\vec{a} = r|\vec{a}|^2 - (1-s)|\vec{a}|^2 - s\vec{b}\cdot\vec{a} = 0$$

である。よって，$rs^2 - (1-s)s^2 - s^2(1-s)\cos\theta = 0$ と $s > 0$ から $r = (1-s)(1+\cos\theta)$ を得る。よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = (1-s)(1+\cos\theta)\vec{a}$$

となる。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}}{2s} = \dfrac{1}{2s}\left\{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\right\} = \dfrac{1}{2s}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\dfrac{1}{2s} = \dfrac{3}{4}$ であるから，$s = \dfrac{2}{3}$ である。また，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = (1-s)(1+\cos\theta)\vec{a}$ より，$(1-s)(1+\cos\theta) = \dfrac{1}{4}$ である。$s = \dfrac{2}{3}$ であるので，

$$\cos\theta = \frac{1}{4(1-s)} - 1 = -\frac{1}{4}$$

である。このとき，$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ より，$\triangle$OAB の面積は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta = \frac{1}{2}s(1-s)\times\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{36}$$

である。

受　験　番　号

小　　計

数　　学 そ の 2
工　学　部・生命環境学部

令和８年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲ・Ｃその３ ）

3

(1) 直線 AB の傾きは $\tan(\pi-\theta)$ であり，y 軸上の切片は $\sin\theta$ である。よって

$$y = x\tan(\pi-\theta)+\sin\theta = -x\tan\theta+\sin\theta$$

を得る。

(2) $f(t) = -p\tan t+\sin t$ に対し

$$f'(t) = \cos t - \frac{p}{\cos^2 t} = \frac{\cos^3 t - p}{\cos^2 t}$$

であるので，$f'(t)=0$ となるのは $\cos^3 t = p$ のときである。ここで，$h(t) = \cos^3 t - p$ とおくと，関数 $h(t)$ は区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ で連続であり，$0<p<1$ より

$$h(0) = 1-p>0, \quad h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -p<0$$

であるので，方程式 $h(t)=0$ は $0<t<\frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。一方，$0<t<\frac{\pi}{2}$ において

$$h'(t) = -3\cos^2 t\sin t<0$$

であるので，$h(t)$ は区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ で単調に減少する。よって $h(\varphi)=0$ を満たす φ が $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ の範囲において，ただ 1 つ存在する。このとき，$\cos\varphi = p^{\frac{1}{3}}, \sin\varphi = (1-p^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$ より，$f(\varphi) = \left(1-p^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ に注意すれば，$f(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	φ	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\left(1-p^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$	$\searrow$	

よって，$f(t)$ は $t=\varphi$ で最大値 $\left(1-p^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ をとる。

(3) 点 A, B が動くとき，$\theta = \angle\mathrm{OAB}$ は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲を動く。(1) より，点 (p,q) が D に属するための必要十分条件は，ある θ に対して $q \geqq 0$ かつ $q = -p\tan\theta+\sin\theta$ が成り立つことである。さらに，(2) より，この条件を満たす q の最大値は

$$g(p) = \left(1-p^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

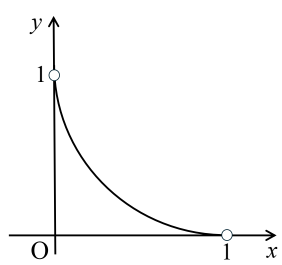
である。関数 $g(x) = \left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ $(0<x<1)$ について

$$g'(x) = -x^{-\frac{1}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}<0, \quad g''(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}>0$$

であるので，$g(x)$ の増減，グラフの凹凸は，次の表のようになる。

x	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	
$g''(x)$		$+$	
$g(x)$	1	↘	0

以上により，関数 $y=g(x)$ $(0<x<1)$ のグラフの概形は下図のようになる。



受　験　番　号

小　　計

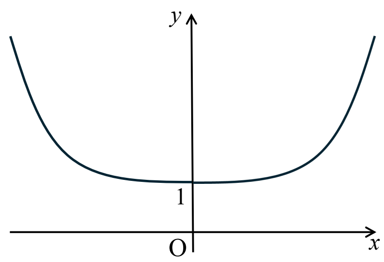
数　　学　そ　の　３
工　学　部・生命環境学部

令和８年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲ・Ｃその４ ）

4

(1) $f'(x)=\dfrac{1}{6}\left(e^{\frac{x}{3}}-e^{-\frac{x}{3}}\right)=\dfrac{1}{6}e^{-\frac{x}{3}}\left(e^{\frac{2x}{3}}-1\right)$, $f''(x)=\dfrac{1}{18}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)=\dfrac{1}{9}f(x)>0$ より，$f(x)$ の増減, グラフの凹凸は，右表のようになる。また，$f(-x)=f(x)$ であるので $f(x)$ は偶関数であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ であるので，グラフの概形は右図のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	1	↗



(2) 曲線 C_1 と C_2 の交点の x 座標は $2t-f(x)=t+f(x)$ より $2f(x)-t=0$ となり，$e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}-t=0$ を満たす。よって, $(e^{\frac{x}{3}})^2-te^{\frac{x}{3}}+1=0$ より $e^{\frac{x}{3}}=\dfrac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$ であり，この式の右辺が $t>2$ のとき正であることに注意して，

$$x=3\log\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$$

を得る。とくに，$t>2$ のとき $t+\sqrt{t^2-4}>2$ であるので

$$\beta=3\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}\quad(>0),\quad \alpha=3\log\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}\quad\left(=3\log\frac{2}{t+\sqrt{t^2-4}}=-\beta<0\right)$$

である。したがって，点 Q の座標は,

$$\big(\beta,\ t+f(\beta)\big)=\left(3\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2},\ \frac{3t}{2}\right)$$

となる。

(3) 曲線 C_1 と C_2 は 2 点を共有し，$x=0$ のとき C_1 の y 座標は $2t-1$，C_2 の y 座標は $t+1$ であり，$t>2$ では $2t-1>t+1$ であることから，$\alpha<x<\beta$ において，C_1 の y 座標の値は C_2 の y 座標の値より大きい。よって $t>2$ のとき，求める面積 S は，$e^{\frac{\beta}{3}}=\dfrac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$, $e^{-\frac{\beta}{3}}=e^{\frac{\alpha}{3}}=\dfrac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}$ に注意すれば

$$\begin{aligned}S&=\int_\alpha^\beta\{(2t-f(x))-(t+f(x))\}\,dx=2\int_0^\beta\{(2t-f(x))-(t+f(x))\}\,dx\\&=2\int_0^\beta\left(t-e^{\frac{x}{3}}-e^{-\frac{x}{3}}\right)dx=2\left[tx-3e^{\frac{x}{3}}+3e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^\beta\\&=6t\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}-6\sqrt{t^2-4}\end{aligned}$$

となる。

(4) 点 Q の座標を $(u(t),v(t))$ とすると，(2) により，

$$u(t)=3\log\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2},\quad v(t)=\frac{3t}{2}$$

である。このとき

$$\frac{du(t)}{dt}=\frac{3}{\sqrt{t^2-4}},\quad \frac{dv(t)}{dt}=\frac{3}{2}$$

であるので，$3\leqq t\leqq 4$ のとき，点 Q が描く曲線の長さ L は

$$\begin{aligned}L&=\int_3^4\sqrt{\left(\frac{du(t)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv(t)}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\frac{1}{2}\int_3^4\frac{3t}{\sqrt{t^2-4}}dt=\frac{3}{2}\int_3^4\left(\sqrt{t^2-4}\right)'dt=\frac{3}{2}\left[\sqrt{t^2-4}\right]_3^4\\&=\frac{3}{2}(2\sqrt{3}-\sqrt{5})\end{aligned}$$

となる。

受　験　番　号

小　　計

数　　学　そ　の　４
工　学　部・生命環境学部