令和 8 年度入学者選抜試験問題・答案用紙　（教・生　数学I・A・II・B・C その1）

問題 1　次の問いに答えよ。答えだけでなく，どのように考えたのか，途中の計算および説明も書け。

(1) 2 つの円 $x^2+y^2=5$ と $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ の 2 つの交点を通り，半径が $\sqrt{15}$ である円の中心の座標を求めよ。

(2) 2 つのさいころ A，B を同時に投げる試行において，さいころ A の目を a，さいころ B の目を b とする。この試行を 1 回行ったとき，$\log_2(a+5b)$ の値が整数となる確率を求めよ。

(3) 4 辺 AB，BC，CD，DA の長さがすべて異なる四角形 ABCD が円に内接しており，$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{CD}=2$，$\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$ である。四角形 ABCD の 2 つの対角線 AC と BD の交点を P とし，$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:2$ であるとき，DA の長さを求めよ。

解答例

(1) 題意の円の方程式は k を定数として，

$$k(x^2+y^2-5)+\{(x-1)^2+(y-2)^2-5\}=0$$

と表される。これより，$(k+1)x^2+(k+1)y^2-2x-4y=5k$ であり，円であることから $k \fallingdotseq -1$ なので，整理すると，

$$\left(x-\frac{1}{k+1}\right)^2+\left(y-\frac{2}{k+1}\right)^2=\frac{5(k^2+k+1)}{(k+1)^2}$$

となる。半径が $\sqrt{15}$ なので，

$$\frac{5(k^2+k+1)}{(k+1)^2}=15$$

を得る。分母を払って整理すると，

$$\begin{aligned}k^2+k+1&=3(k+1)^2\\2k^2+5k+2&=0\\(2k+1)(k+2)&=0\end{aligned}$$

となる。よって，$k=-\dfrac{1}{2},-2$ であり，中心の座標は $(2,4)$，$(-1,-2)$ である。

(2) a,b はともに 1 以上 6 以下の整数なので，$a+5b$ は 6 以上 36 以下の整数である。$\log_2(a+5b)=n$ とおくと，対数の定義より

$$a+5b=2^n$$

であり，$6 \leqq 2^n \leqq 36$ を満たす整数 n は $n=3,4,5$ である。右の表より $a+5b=2^3=8$ を満たすのは $(a,b)=(3,1)$，$a+5b=2^4=16$ を満たすのは $(a,b)=(1,3),(6,2)$，$a+5b=2^5=32$ を満たすのは $(a,b)=(2,6)$ に限る。よって，求める確率は

$$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

である。

$a+5b$ の値

$b\backslash a$	1	2	3	4	5	6
1	6	7	8	9	10	11
2	11	12	13	14	15	16
3	16	17	18	19	20	21
4	21	22	23	24	25	26
5	26	27	28	29	30	31
6	31	32	33	34	35	36

(3) △APD と △BPC は，円周角の定理から $\angle\mathrm{PAD}=\angle\mathrm{PBC}$，$\angle\mathrm{PDA}=\angle\mathrm{PCB}$ となり相似なので，$\mathrm{AD}:\mathrm{BC}=\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:2$ である。よって，$\mathrm{AD}=x$ とすると $\mathrm{BC}=2x$ である。△ABC に対する余弦定理より，

$$\mathrm{AC}^2=3^2+(2x)^2-2\cdot3\cdot2x\cdot\cos 60^\circ=9+4x^2-6x$$

である。また，四角形 ABCD は円に内接しているので，$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{ADC}=180^\circ$ であるから，△ADC に対する余弦定理より，

$$\mathrm{AC}^2=x^2+2^2-2\cdot x\cdot 2\cdot\cos 120^\circ=x^2+4+2x$$

である。ゆえに，$9+4x^2-6x=x^2+4+2x$ から $3x^2-8x+5=(3x-5)(x-1)=0$ となり，$x=\dfrac{5}{3}$ または 1 である。$x=1$ のとき，$\mathrm{BC}=2=\mathrm{CD}$ となり不適。$x=\dfrac{5}{3}$ のとき，$\mathrm{BC}=\dfrac{10}{3}$ である。これは題意を満たすので，DA の長さは $\dfrac{5}{3}$ である。

（教・生　数学I・A・II・B・C その1）

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計

問題 2　t を正の定数とする。座標平面上で，3 次関数 $y = x^3 - 4x$ のグラフを C，2 次関数 $y = tx^2$ のグラフを D とする。C と D は原点以外に 2 つの交点をもつ。その 2 つの交点の x 座標を α，$\beta\,(\alpha < \beta)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = x^3 - 4x$ の極値を求めよ。

(2) $\alpha^2 + \beta^2$ を t の式で表せ。

(3) C と D で囲まれた 2 つの部分に対し，$x \geqq 0$ の部分の面積を $S_+(t)$，$x \leqq 0$ の部分の面積を $S_-(t)$ とする。このとき，$T = \dfrac{S_+(t) - S_-(t)}{\beta - \alpha}$ を t の式で表せ。

解答例

(1) $y' = 3x^2 - 4$ より，$y' = 0$ とすると $x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ である。このとき，y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

y は $x = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ で極大値 $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\dfrac{8\sqrt{3}}{9} + \dfrac{8\sqrt{3}}{3} = \dfrac{16\sqrt{3}}{9}$ をとる。

また，$x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ で極小値 $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 4\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{8\sqrt{3}}{9} - \dfrac{8\sqrt{3}}{3} = -\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$ をとる。

(2) C と D の交点の x 座標は，$x^3 - 4x = tx^2$ より，方程式 $x(x^2 - tx - 4) = 0$ の解であるから，α と β は 2 次方程式 $x^2 - tx - 4 = 0$ の解である。解と係数の関係から $\alpha + \beta = t$，$\alpha\beta = -4$ であるので，$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = t^2 + 8$ である。

(3) $\alpha < 0 < \beta$ であるから面積 $S_+(t)$，$S_-(t)$ は

$$S_+(t) = \int_0^\beta \{tx^2 - (x^3 - 4x)\}\,dx = \left[\frac{1}{3}tx^3 - \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right)\right]_0^\beta = -\frac{1}{4}\beta^4 + \frac{1}{3}t\beta^3 + 2\beta^2,$$

$$S_-(t) = \int_\alpha^0 \{(x^3 - 4x) - tx^2\}\,dx = \left[\left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right) - \frac{1}{3}tx^3\right]_\alpha^0 = -\frac{1}{4}\alpha^4 + \frac{1}{3}t\alpha^3 + 2\alpha^2$$

となる。ここで，

$$\begin{aligned} S_+(t) - S_-(t) &= -\frac{1}{4}(\beta^4 - \alpha^4) + \frac{1}{3}t(\beta^3 - \alpha^3) + 2(\beta^2 - \alpha^2) \\ &= -\frac{1}{4}(\beta - \alpha)(\beta + \alpha)(\beta^2 + \alpha^2) + \frac{1}{3}t(\beta - \alpha)(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + 2(\beta - \alpha)(\beta + \alpha) \end{aligned}$$

より

$$T = \frac{S_+(t) - S_-(t)}{\beta - \alpha} = -\frac{1}{4}(\beta + \alpha)(\beta^2 + \alpha^2) + \frac{1}{3}t(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + 2(\beta + \alpha)$$

である。(2) と合わせて

$$T = -\frac{1}{4}t(t^2 + 8) + \frac{1}{3}t(t^2 + 8 - 4) + 2t = \frac{1}{12}t^3 + \frac{4}{3}t$$

となる。

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計

問題 3　s を $0 < s < 1$ を満たす実数とする。△OAB について，辺 OA の長さを s，辺 OB の長さを $1-s$，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とする。また，∠AOB の二等分線と辺 AB との交点を C とする。点 B から直線 OC に下ろした垂線と直線 OC との交点を H とし，直線 BH と直線 OA との交点を D とする。また，点 C から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，s を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，s，$\cos\theta$ を用いて表せ。

(3) 点 H が線分 OC を 3 : 1 に内分し，点 E が辺 OA を 1 : 3 に内分しているとき，$\cos\theta$ の値を求め，△OAB の面積を求めよ。

解答例

(1) 直線 OC は ∠AOB の二等分線であり，線分 BD と垂直なので，△OBH と △ODH において，∠BOH = ∠DOH，∠OHB = ∠OHD，辺 OH は共通だから，△OBH ≡ △ODH となる。よって，△OBD は OB = OD の二等辺三角形となる。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{1-s}{s}\vec{a}$ であり，点 H は BD の中点であるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{\vec{b} + \dfrac{1-s}{s}\vec{a}}{2} = \frac{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}}{2s}$$

である。

(2) 三角形において頂角の二等分線は，対辺をその角を挟む辺の長さの比に分けるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$$

である。また，E は OA 上の点なので，ある実数 r があって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = r\overrightarrow{\mathrm{OA}} = r\vec{a}$ とおける。$\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が垂直なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(r\vec{a} - \left\{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\right\}\right)\cdot\vec{a} = r|\vec{a}|^2 - (1-s)|\vec{a}|^2 - s\vec{b}\cdot\vec{a} = 0$$

である。よって，$rs^2 - (1-s)s^2 - s^2(1-s)\cos\theta = 0$ と $s > 0$ から $r = (1-s)(1+\cos\theta)$ を得る。よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = (1-s)(1+\cos\theta)\vec{a}$$

となる。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}}{2s} = \dfrac{1}{2s}\left\{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\right\} = \dfrac{1}{2s}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\dfrac{1}{2s} = \dfrac{3}{4}$ であるから，$s = \dfrac{2}{3}$ である。また，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = (1-s)(1+\cos\theta)\vec{a}$ より，$(1-s)(1+\cos\theta) = \dfrac{1}{4}$ である。$s = \dfrac{2}{3}$ であるので，

$$\cos\theta = \frac{1}{4(1-s)} - 1 = -\frac{1}{4}$$

である。このとき，$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ より，△OAB の面積は

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta = \frac{1}{2}s(1-s)\times\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{36}$$

である。

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受験番号	小計