

問題用紙 (工学部・生命環境学部 数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ・C)

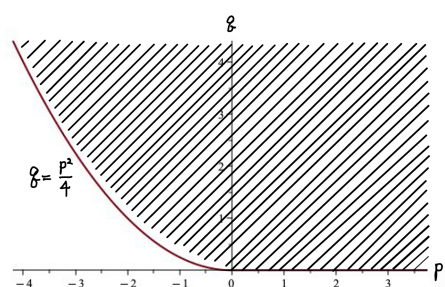
- 1 (1) $x > 0$ のとき, x の関数 $f(x) = x^2 + px + q$ の値が $\forall x > 0$ に正になるような定数 p, q の組 (p, q) を座標とする点全体の集合を pq 平面上に図示せよ。
- (2) $a > 0$ とする。2 次方程式 $x^2 - (2a - 1)x + 2 - a = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, その実数解を $\tan A, \tan B$ とする。このとき $\tan(A + B)$ がとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) 次の定積分を求めよ。

$$\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x^2} dx$$
- 2 $\angle AOB = 60^\circ$, $OA > OB$ である $\triangle OAB$ について, 辺 OA を $3:1$ に内分する点を C , 辺 OB を $4:1$ に内分する点を D とする。また, $0 < u < 1$ である実数 u に対し, 辺 AB を $u:(1-u)$ に内分する点を P とし, 辺 OA と直線 CP は垂直であるとする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき, 次の問いに答えよ。
- (1) $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ を u の式で表せ。
- (2) 点 D が $\triangle OCP$ の外接円上の点であるとき, u の値を求め, $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。
- 3 a, b を正の実数とし, xy 平面上の曲線 $y = -ax^2 + b$ を C_1 , 曲線 $y = -2\log x$ を C_2 とする。曲線 C_1, C_2 は共有点 P をもち, 点 P において共通の接線をもつとする。次の問いに答えよ。
- (1) b を a の式で表せ。また, a の値の範囲を求めよ。
- (2) 曲線 C_1 と x 軸で囲まれた部分を, y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を a の式で表せ。
- (3) (2) の体積を $V(a)$ としたとき, $V(a)$ の最大値と, そのときの a の値を求めよ。
- 4 $f(x) = e^{-x} \sin x$ とし, $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $I_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x) dx$ と定める。次の問いに答えよ。
- (1) $g(x) = e^{-x} \cos x$ とするとき, $f'(x) + g'(x)$ を求めよ。
- (2) I_1 の値を求めよ。
- (3) 数列 $\{I_n\}$ が等比数列となることを示し, その公比を求めよ。
- (4) 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} I_n$ の収束, 発散を調べ, 収束するときはその和を求めよ。

受 験 番 号

令和7年度入学者選抜試験 答案用紙 (数学I・A・II・B・III・Cその1)

- 1 (1) $f(x) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$ より, 放物線 $y = f(x)$ の軸は, 直線 $x = -\frac{p}{2}$ である。 $-\frac{p}{2} \leq 0$ のとき $x > 0$ で $f(x) > 0$ となる条件は $f(0) = q \geq 0$ である。 $-\frac{p}{2} > 0$ のとき $x > 0$ で $f(x) > 0$ となる条件は, 放物線 $y = f(x)$ の頂点の y 座標 $q - \frac{p^2}{4}$ が正となることである。よって, 定数 p, q の組 (p, q) を座標とする点全体の集合は



$\{(p, q) \mid p \geq 0 \text{ かつ } q \geq 0\}$ と

$$\left\{ (p, q) \mid p < 0 \text{ かつ } q > \frac{p^2}{4} \right\}$$

の和集合となる。これを pq 平面上に図示すると左図の斜線部分となる。(原点および p 軸上の正の部分を含み, 曲線 $q = \frac{p^2}{4}$ ($p < 0$) 上の点を含まない。)

- (2) 異なる2つの実数解が存在するのは, 判別式 $D = (2a - 1)^2 - 4(2 - a) = 4a^2 - 7 > 0$ より $a > \frac{\sqrt{7}}{2} \dots (*)$ のときである。このとき, 解と係数の関係より $\tan A + \tan B = 2a - 1, \tan A \tan B = 2 - a$ であるので

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{2a - 1}{1 - (2 - a)} = 2 + \frac{1}{a - 1}$$

となる。ここで $f(a) = 2 + \frac{1}{a - 1}$ とおく。 ab 平面上の双曲線 $b = f(a)$ について, $(*)$ に注意すると

$$2 < f(a) < f\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = 2 + \frac{2}{\sqrt{7} - 2} = \frac{2\sqrt{7} + 10}{3}$$

を得る。つまり

$$2 < \tan(A + B) < \frac{2\sqrt{7} + 10}{3}$$

である。

- (3) 部分積分法より

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{(\log x)^2}{x^2} dx &= \int_1^e \frac{1}{x^2} \cdot (\log x)^2 dx = \left[-\frac{1}{x} \cdot (\log x)^2 \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x} \cdot \frac{2 \log x}{x} dx \\ &= -\frac{1}{e} + 2 \int_1^e \frac{\log x}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{e} + 2 \left(\left[-\frac{1}{x} \cdot \log x \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx \right) \\ &= -\frac{1}{e} + 2 \left(-\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^e \right) \\ &= -\frac{1}{e} + 2 \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 \right) \\ &= -\frac{5}{e} + 2 \end{aligned}$$

である。

受 験 番 号

小 計

2

(1) $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{4}\vec{a}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{4}{5}\vec{b}$ であり, また, $\overrightarrow{OP} = (1-u)\vec{a} + u\vec{b}$ であるので,

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = (1-u)\vec{a} + u\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} = \left(\frac{1}{4} - u\right)\vec{a} + u\vec{b}$$

である。OA ⊥ CP より, 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$ なので, $\vec{a} \cdot \left(\left(\frac{1}{4} - u\right)\vec{a} + u\vec{b}\right) = 0$ から $\left(\frac{1}{4} - u\right)|\vec{a}|^2 + u\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ を得る。 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$ より

$$\left(\frac{1}{4} - u\right)|\vec{a}|^2 + \frac{u}{2}|\vec{a}||\vec{b}| = 0$$

であるから, $|\vec{a}| \neq 0$, $u \neq 0$ より

$$\frac{\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}}{-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4} - u}{u} = \frac{4u - 1}{2u}$$

となる。

(2) 点 D が △OCP の外接円上の点であるとき, 円に内接する四角形の対角の和は 180° なので, 四角形 OCPD について $\angle ODP = 90^\circ$ である。 $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OD} = (1-u)\vec{a} + u\vec{b} - \frac{4}{5}\vec{b} = (1-u)\vec{a} + \left(u - \frac{4}{5}\right)\vec{b}$ であるから, OB ⊥ DP より, 内積 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{DP} = 0$ なので, $\vec{b} \cdot \left((1-u)\vec{a} + \left(u - \frac{4}{5}\right)\vec{b}\right) = 0$ から $(1-u)\vec{b} \cdot \vec{a} + \left(u - \frac{4}{5}\right)|\vec{b}|^2 = 0$ を得る。よって,

$$\frac{1-u}{2}|\vec{a}||\vec{b}| + \left(u - \frac{4}{5}\right)|\vec{b}|^2 = 0$$

である。両辺を $|\vec{a}||\vec{b}| \neq 0$ で割り, (1) の結果 $\frac{\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}}{-\frac{1}{2}} = \frac{4u - 1}{2u}$ から

$$\frac{1-u}{2} + \left(u - \frac{4}{5}\right) \frac{4u - 1}{2u} = 0$$

となり, 2 次方程式 $15u^2 - 16u + 4 = 0$ を得る。この 2 次方程式を解いて, $u = \frac{2}{3}, \frac{2}{5}$ となる。

$u = \frac{2}{3}$ のとき, (1) から $\frac{\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}}{-\frac{1}{2}} = \frac{4 \times \frac{2}{3} - 1}{2 \times \frac{2}{3}} = \frac{5}{4} > 1$ であるので, OB > OA となり, 不適である。 $u = \frac{2}{5}$ のとき,

$\frac{\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}}{-\frac{1}{2}} = \frac{4 \times \frac{2}{5} - 1}{2 \times \frac{2}{5}} = \frac{3}{4} < 1$ であり, 題意を満たす。よって, $u = \frac{2}{5}$ であり, このとき, $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$ である。

受 験 番 号

小 計

3

- (1) $f(x) = -ax^2 + b$, $g(x) = -2\log x$ とおき, 共有点 P の x 座標を p とする。 $f(p) = g(p)$ であるので

$$-ap^2 + b = -2\log p \quad \cdots (*)$$

を得る。また, 2つの曲線 C_1 , C_2 の点 P における接線の傾きは等しいので, $f'(x) = -2ax$, $g'(x) = -\frac{2}{x}$ を用いると

$$-2ap = -\frac{2}{p} \quad \cdots (**)$$

を得る。点 P は曲線 C_2 上の点であるので, $p > 0$ であることに注意すると, (**) から $p = \frac{1}{\sqrt{a}}$ を得る。これを (*) に代入すると $b = \log a + 1$ を得る。 $b > 0$ より $\log a + 1 > 0$ であるので $a > e^{-1}$ を得る。

- (2) (1) より回転体の体積を a の式で表すと

$$\pi \int_0^b x^2 dy = \pi \int_0^b \frac{b-y}{a} dy = \frac{\pi}{a} \left[by - \frac{y^2}{2} \right]_0^b = \frac{\pi b^2}{2a} = \frac{\pi(\log a + 1)^2}{2a}$$

を得る。

- (3) (2) より $V(a) = \frac{\pi(\log a + 1)^2}{2a}$ である。 a の関数 $V(a)$ に対し

$$V'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2(\log a + 1) \cdot \left(\frac{1}{a}\right) \cdot a - (\log a + 1)^2 \cdot 1}{a^2} = \frac{\pi(\log a + 1)(1 - \log a)}{2a^2}$$

である。 $\log a + 1 > 0$ に注意すると, $1 > \log a$ のとき $V'(a) > 0$ であるので $V(a)$ は単調増加, $1 < \log a$ のとき $V'(a) < 0$ であるので $V(a)$ は単調減少となる。よって, $\log a = 1$ (つまり $a = e$) のとき $V'(a) = 0$ となり, $V(a)$ は $a = e$ のとき最大値 $V(e) = \frac{2\pi}{e}$ をとる。

受 験 番 号

小 計

4

(1) $f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$, $g'(x) = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x$ であるので, $f'(x) + g'(x) = -2e^{-x} \sin x$ を得る。

(2) (1) より $\frac{f'(x) + g'(x)}{-2} = e^{-x} \sin x = f(x)$ であるので

$$I_1 = \int_0^\pi f(x) dx = \frac{1}{-2} \int_0^\pi \{f'(x) + g'(x)\} dx = \frac{1}{-2} \left[f(x) + g(x) \right]_0^\pi = \frac{1}{-2} \left[e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_0^\pi = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}$$

を得る。

(3) (2) と同様にして

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} f(x) dx = \frac{1}{-2} \left[e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} = \frac{1}{-2} \cdot \left\{ e^{-n\pi} \cos n\pi - e^{-(n-1)\pi} \cos(n-1)\pi \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{-1}{2} e^{-n\pi} (1 + e^\pi) & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{1}{2} e^{-n\pi} (1 + e^\pi) & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{2} e^{-n\pi} (1 + e^\pi) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

であるので

$$\frac{I_{n+1}}{I_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+2}}{2} e^{-(n+1)\pi} (1 + e^\pi)}{\frac{(-1)^{n+1}}{2} e^{-n\pi} (1 + e^\pi)} = -e^{-\pi}$$

を得る。よって, 数列 $\{I_n\}$ は公比 $-e^{-\pi}$ の等比数列である。

(4) (2), (3) より, 数列 $\{I_n\}$ は初項 $\frac{1 + e^{-\pi}}{2}$, 公比 $-e^{-\pi}$ の等比数列である。 $|-e^{-\pi}| < 1$ であるので, 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} I_n$ は収束し, その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n = \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \cdot \frac{1}{1 - (-e^{-\pi})} = \frac{1}{2}$$

となる。

受 験 番 号

小 計