令 和 5 年 度 入 学 者 選 抜 試 験

問題用紙 (工学部 数学I・A・II・B・III)

1 次の問いに答えよ。

(1) ある製品の価格は，1 年経過するごとに 0.96 倍になる。この製品の価格が現在の価格の半額を初めて下回るのは何年後か。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(2) n を自然数とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ が成り立つことを示せ。

(3) 等式 $f(x) = \sin 2x + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

2 次の問いに答えよ。

(1) $a_1 = 36,\quad a_{n+1} = 6a_n{}^6,\quad b_n = \log_6 a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ それぞれの一般項を求めよ。

(2) $c_1 = 6,\quad c_{n+1} = \dfrac{n+3}{n+1}c_n + 1,\quad d_n = \dfrac{c_n}{(n+1)(n+2)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定義される数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ それぞれの一般項を求めよ。

3 関数 $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2+1}$ に対し，次の問いに答えよ。

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，そのグラフの概形をかけ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

4 ω および γ を正の定数とする。座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 (x, y) が

$$x = \omega t - \gamma \sin \omega t,\quad y = 1 - \gamma \cos \omega t$$

で表されるとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P が描く曲線について，時刻 $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

(2) 点 P の時刻 t における速度を $\vec{v}$，加速度を $\vec{\alpha}$ とするとき，速さ $|\vec{v}|$ と加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ を求めよ。

(3) 点 P の速さの最大値とそのときの時刻 t を求めよ。

(4) $\gamma = 1$ とする。このとき，時刻 $t = 0$ から $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ までに点 P が通過する道のり L を求めよ。

受 験 番 号

令和５年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲその１ ）

1　(1)　1 年ごとに前の年の価格の $\dfrac{96}{100}$ となるから，

$$\left(\frac{96}{100}\right)^n < \frac{1}{2}$$

となる最小の自然数 n を求めればよい。両辺の常用対数をとると，

$$\begin{aligned} n\log_{10}\frac{96}{100} &< \log_{10}\frac{1}{2} \\ n(\log_{10}2^5\cdot 3 - \log_{10}100) &< -\log_{10}2 \\ n(5\log_{10}2 + \log_{10}3 - 2) &< -\log_{10}2 \\ n(1.5050 + 0.4771 - 2) &< -0.3010 \\ -0.0179n &< -0.3010 \\ n &> 16.8 \end{aligned}$$

である。よって $n = 17$ となり，17 年後である。

---

(2)　与えられた等式を ① とおく。

[1] $n = 1$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{1}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = (1-1)\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0,\quad 1-(1+1)\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0$ となり，① は成り立つ。

[2] $n = m$ のとき ① が成り立つ，すなわち，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = 1-(m+1)\left(\frac{1}{2}\right)^m$ と仮定する。$n = m+1$ のとき，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=1}^{m}(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k + (m+1-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \\ &= 1-(m+1)\left(\frac{1}{2}\right)^m + m\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \\ &= 1-(m+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \end{aligned}$$

となる。よって $n = m+1$ のときも ① が成り立つ。[1] [2] より，① はすべての自然数 n について成り立つ。

---

(3)　$\alpha = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(t)\,dt$ とおくと $f(x) = \sin 2x + \alpha$ であり，

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t(\sin 2t + \alpha)\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin 2t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha t\,dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t\,dt + \left[\frac{1}{2}\alpha t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi^2}{8}\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{8}\alpha \end{aligned}$$

となる。よって，$\alpha = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi^2}{8}\alpha$ となり $\alpha = \dfrac{2\pi}{8-\pi^2}$ である。したがって，$f(x) = \sin 2x + \dfrac{2\pi}{8-\pi^2}$ となる。

受　験　番　号

小　　　計

数　　学　そ　の　1
工　学　部

2

(1) $b_n = \log_6 a_n$ より，$n=1$ のとき $b_1 = \log_6 a_1 = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$ であり，数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式から，

$$b_{n+1} = \log_6 a_{n+1} = \log_6 6a_n^6 = 1 + 6\log_6 a_n = 1 + 6b_n,$$

つまり，$b_{n+1} = 1 + 6b_n$ を得る。この漸化式は $\beta = 1 + 6\beta$ を満たす解 $\beta = -\frac{1}{5}$ を用いて，$b_{n+1} + \frac{1}{5} = 6\left(b_n + \frac{1}{5}\right)$ のように変形される。したがって，$b_1 = 2$ も用いれば $b_n + \frac{1}{5} = 6^{n-1}\left(b_1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{11}{5}6^{n-1}$ となる。ゆえに数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = \frac{11}{5}6^{n-1} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(11 \cdot 6^{n-1} - 1)$ である。一方 $b_n = \log_6 a_n$ から $a_n = 6^{b_n}$ となるので，b_n をこれに代入すれば数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = 6^{\frac{1}{5}(11\cdot 6^{n-1}-1)}$ であるとわかる。

(2) $d_n = \frac{c_n}{(n+1)(n+2)}$ より，$n = 1$ のとき $d_1 = \frac{c_1}{(1+1)(1+2)} = \frac{6}{2\cdot 3} = 1$ であり，数列 $\{c_n\}$ の漸化式の両辺を $(n+2)(n+3)$ で割れば，

$$\frac{c_{n+1}}{(n+2)(n+3)} = \frac{c_n}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

となるので，$d_{n+1} - d_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ を得る。これより $n \geqq 2$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n-1}(d_{k+1} - d_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

となるが，(左辺) $= d_n - d_1 = d_n - 1$，(右辺) $= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2}$ である。ゆえに $d_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} = \frac{4n+5}{3(n+2)}$ が得られ，$n=1$ のときもこれが成り立ち，$c_n = (n+1)(n+2)\cdot\frac{4n+5}{3(n+2)} = \frac{(n+1)(4n+5)}{3}$ となる。

受　験　番　号

小　　計

令和５年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲその３ ）

3

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$，また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$ である。

(2) $f(x)$ の定義域は実数全体である。$f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2+1} = 1 - \dfrac{4}{x^2+1}$ より $f'(x) = \dfrac{8x}{(x^2+1)^2}$，

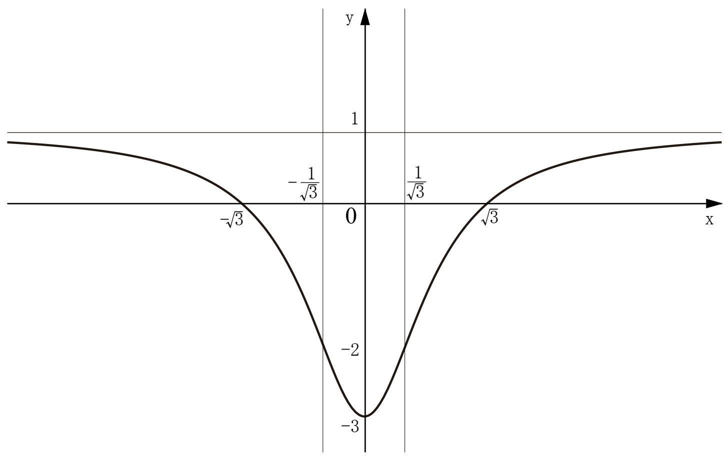
$$f''(x) = \frac{8(x^2+1)^2 - 8x\cdot 4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{8(x^2+1)-32x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-24x^2+8}{(x^2+1)^3} = \frac{-24(x^2-\frac{1}{3})}{(x^2+1)^3} = \frac{-24(x+\frac{1}{\sqrt{3}})(x-\frac{1}{\sqrt{3}})}{(x^2+1)^3}$$

であるから $f(x)$ の増減や凹凸は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\nearrow$

これより $x=0$ で極小値 -3 をとる。また，変曲点は $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -2\right)$，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -2\right)$ である。

さらに，(1) より直線 $y=1$ が漸近線であることがわかるので，グラフは以下のようになる。



(3) $f(x)=0$ とすると $x=\pm\sqrt{3}$ であるから $x \geqq 0$ における $y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点は $(0,\sqrt{3})$。よって求める面積の右半分は以下で与えられる。

$$\int_0^{\sqrt{3}}(-f(x))\,dx = \int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{4}{x^2+1}-1\right)\,dx = \int_0^{\sqrt{3}}\frac{4}{x^2+1}\,dx - [x]_0^{\sqrt{3}} = \int_0^{\sqrt{3}}\frac{4}{x^2+1}\,dx - \sqrt{3}$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{4}{x^2+1}\,dx$ について $x=\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ となる。また x が $0\to\sqrt{3}$ と変化するとき，θ は $0\to\frac{\pi}{3}$ と変化するので，

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{4}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{4}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{dx}{d\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\,d\theta = [4\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi}{3}$$

である。以上より求める面積は $2\left(\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$ となる。

受　験　番　号

小　　　計

令和５年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその４ ）

4

(1)

$$\frac{dx}{dt} = \omega - \omega\gamma\cos\omega t,\quad \frac{dy}{dt} = \omega\gamma\sin\omega t$$

より，時刻 t における点 P での接線の傾きは以下となる。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\omega\gamma\sin\omega t}{\omega - \omega\gamma\cos\omega t} = \frac{\gamma\sin\omega t}{1-\gamma\cos\omega t}$$

$t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ のとき，点 P の x 座標，y 座標および傾きは，

$$\begin{aligned} x &= \omega\cdot\frac{\pi}{2\omega} - \gamma\sin\left(\omega\cdot\frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{\pi}{2} - \gamma \\ y &= 1 - \gamma\cos\left(\omega\cdot\frac{\pi}{2\omega}\right) = 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\gamma\sin\left(\omega\cdot\frac{\pi}{2\omega}\right)}{1-\gamma\cos\left(\omega\cdot\frac{\pi}{2\omega}\right)} = \gamma \end{aligned}$$

となる。よって接線の方程式は以下となる。

$$y = \gamma\left\{x - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\right\} + 1 = \gamma x - \frac{\pi\gamma}{2} + \gamma^2 + 1$$

(2)

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(\omega - \omega\gamma\cos\omega t)^2 + (\omega\gamma\sin\omega t)^2} = \omega\sqrt{1+\gamma^2-2\gamma\cos\omega t}$$

また，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2\gamma\sin\omega t,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \omega^2\gamma\cos\omega t$$

より，

$$|\overrightarrow{\alpha}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{(\omega^2\gamma\sin\omega t)^2 + (\omega^2\gamma\cos\omega t)^2} = \omega^2\gamma$$

(3) (2) より，$\cos\omega t = -1$ で速さは最大となる。このとき，速さの最大値は，

$$\omega\sqrt{1+\gamma^2+2\gamma} = (1+\gamma)\omega$$

また，$\cos\omega t = -1$ となるのは，$\omega t = (2n-1)\pi$（n は整数）のときであるから，$t = \dfrac{(2n-1)\pi}{\omega}$ のとき速さは最大となる。

(4) $\gamma = 1$ より，

$$|\overrightarrow{v}| = \omega\sqrt{1+1-2\cos\omega t} = \sqrt{2}\omega\sqrt{1-\cos\omega t} = 2\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|$$

である。ここで，$0 \leqq t \leqq \frac{2\pi}{\omega}$ で $\sin\dfrac{\omega t}{2} \geqq 0$ である。これより，

$$L = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} 2\omega\sin\frac{\omega t}{2}dt = 2\omega\left[-\frac{2}{\omega}\cos\frac{\omega t}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = 8$$

受　験　番　号

小　　　計

数　　学 そ の ４
工 学 部