令和 4 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 表紙）

教育学部

・試験開始までに，表紙の注意事項をよく読んでください。
・筆記用具は，試験開始まで，手にとってはいけません。

（注　意　事　項）

1. 試験開始の合図の後，すぐに用紙の種類と枚数（4 枚）を確かめて，すべての用紙に受験番号を記入してください。
   この配布物には，次の計 4 枚が含まれています。

   令和 4 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 表紙）
   令和 4 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 1）
   令和 4 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 2）
   令和 4 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 3）

2. 試験終了後，配布されたすべての用紙を回収します。
3. 配布された用紙が上記 1. と異なっているときや印刷が不鮮明なときには，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 各「試験問題並びに答案用紙」の右下隅にある小計の欄には何も記入してはいけません。
5. 解答を書ききれないときは，その問題が記載してある用紙の裏面を利用してもかまいません。その場合は，問題記載の面の右下方に「裏面使用」と記入してください。

（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 表紙）

受　験　番　号

問題 1　次の問いに答えよ。答えだけでなく，どのように考えたのか，途中の計算および説明も書け。

(1) 6 以上 2022 以下の 3 の倍数のうちで，3 で割った商を素因数分解したとき，2 以外の素因数をもたないものを考える。そのような 3 の倍数すべての和を求めよ。

(2) 方程式 $\log_2|x^2-3x+2|+\log_2|x^2-5x+6| = 2\log_2(x-2)$ を解け。

(3) 正三角形 ABC の辺 AC 上に点 D，辺 AB 上に点 E があり，$\angle\mathrm{CBD}=15^\circ$，$\angle\mathrm{BDE}=30^\circ$ である。このとき，$\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BD}}$ の値を求めよ。

解答例

(1) 6 以上の 3 の倍数のうちで，3 で割った商を素因数分解したとき，2 以外の素因数をもたない数は，$6=3\times 2$，$12=3\times 2^2$ など 3×2^n（n は自然数）と表される。$2022=3\times 674$，$2^9<674<2^{10}$ なので，2022 以下で題意を満たす最大の数は 3×2^9 である。よって求める和は

$$\sum_{n=1}^{9} 3\cdot 2^n = 3\sum_{n=1}^{9} 2\cdot 2^{n-1} = 3\times\frac{2\cdot(2^9-1)}{2-1} = 3066$$

である。

(2) 与えられた方程式は $\log_2|(x-1)(x-2)|+\log_2|(x-2)(x-3)| = 2\log_2(x-2)$ である。真数は正であるから $x-2>0$ かつ $x \fallingdotseq 3$ である。また，$x-2>0$ のとき，$x-1>0$ であるので，$|(x-1)(x-2)|=(x-1)(x-2)$ である。

(i) $2<x<3$ のとき，$|(x-2)(x-3)|=(x-2)(3-x)$ より，与えられた方程式は

$$\begin{aligned}
\log_2(x-1)(x-2)+\log_2(x-2)(3-x) &= 2\log_2(x-2)\\
\log_2(x-1)+\log_2(x-2)+\log_2(x-2)+\log_2(3-x) &= 2\log_2(x-2)\\
\log_2(x-1)+\log_2(3-x) &= 0\\
\log_2(x-1)(3-x) &= \log_2 1
\end{aligned}$$

となる。よって，$(x-1)(3-x)=1$ から $(x-2)^2=0$ となり，$x=2$ を得るが，これは $2<x<3$ を満たさない。

(ii) $3<x$ のとき，$|(x-2)(x-3)|=(x-2)(x-3)$ より，与えられた方程式は

$$\begin{aligned}
\log_2(x-1)(x-2)+\log_2(x-2)(x-3) &= 2\log_2(x-2)\\
\log_2(x-1)+\log_2(x-3) &= 0\\
\log_2(x-1)(x-3) &= \log_2 1
\end{aligned}$$

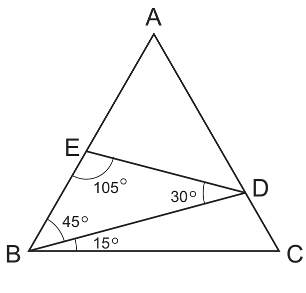
となる。よって，$(x-1)(x-3)=1$ から $x^2-4x+2=0$ となり，$x=2\pm\sqrt{2}$ を得る。このうち，$3<x$ を満たすのは $x=2+\sqrt{2}$ である。

以上より，与えられた方程式の解は $x=2+\sqrt{2}$ である。

(3) $\triangle\mathrm{BDE}$ において，$\angle\mathrm{EBD}=\angle\mathrm{ABC}-\angle\mathrm{CBD}=45^\circ$，$\angle\mathrm{BED}=180^\circ-\angle\mathrm{BDE}-\angle\mathrm{EBD}=105^\circ$ である。よって正弦定理より $\dfrac{\mathrm{BD}}{\sin 105^\circ}=\dfrac{\mathrm{DE}}{\sin 45^\circ}$ が成り立つ。したがって，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{BD}} &= \frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin(45^\circ+60^\circ)}=\frac{\sin 45^\circ}{\sin 45^\circ\cos 60^\circ+\cos 45^\circ\sin 60^\circ}\\
&= \frac{1}{\cos 60^\circ+\sin 60^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1
\end{aligned}$$

である。



（教育　数学 I・A・II・B その 1）

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計

問題 2　xy 平面上の放物線 $C : y = 4 - x^2$ に対し，C 上に 2 点 $\mathrm{P}(-t, 4 - t^2)$, $\mathrm{Q}(t, 4 - t^2)$ をとる。ただし，$0 < t < 2$ とする。また，C と x 軸との交点で x 座標が負であるものを A とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 三角形 APQ の面積 S が最大となるときの t の値を求めよ。また，そのときの最大値を求めよ。

(2) 線分 PQ と 放物線 C で囲まれた部分の面積を T_1 とし，線分 AP と C で囲まれた部分の面積を T_2 とする。$T = T_1 + 2T_2$ が最小となるときの t の値を求めよ。また，そのときの最小値を求めよ。

解答例

(1) 三角形 APQ の面積 $S = S(t)$ は,

$$S(t) = 2t \cdot (4 - t^2) \cdot \frac{1}{2} = -t^3 + 4t$$

である。$S'(t) = -3t^2 + 4 = -3\left(t - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(t + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ より，$0 < t < 2$ における $S(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	2
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	極大 (最大)	$\searrow$	

これより，$t = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき $S(t)$ は最大で，その値は $S\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{16\sqrt{3}}{9}$ である。

(2) 放物線 C と x 軸との交点の x 座標は $x = \pm 2$ であるから，点 A の x 座標は $x = -2$ である。

$$\begin{aligned}
T_1 = T_1(t) &= \int_{-t}^{t} \{4 - x^2 - (4 - t^2)\}\,dx = \left[t^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-t}^{t} = \frac{4}{3}t^3, \\
T_2 = T_2(t) &= \int_{-2}^{-t} \left[4 - x^2 - \{(t+2)x + 4 + 2t\}\right]\,dx = \int_{-2}^{-t} \{-x^2 - (t+2)x - 2t\}\,dx \\
&= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{t+2}{2}x^2 - 2tx\right]_{-2}^{-t} = \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{t+2}{2}t^2 + 2t^2\right) - \left(\frac{8}{3} - 2(t+2) + 4t\right) \\
&= -\frac{1}{6}t^3 + t^2 - 2t + \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

であるから，$T = T(t) = T_1(t) + 2T_2(t)$ は,

$$T(t) = \frac{4}{3}t^3 + 2\left(-\frac{1}{6}t^3 + t^2 - 2t + \frac{4}{3}\right) = t^3 + 2t^2 - 4t + \frac{8}{3}$$

となる。$T'(t) = 3t^2 + 4t - 4 = (3t - 2)(t + 2)$ より，$0 < t < 2$ における $T(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$T'(t)$		$-$	0	$+$	
$T(t)$		$\searrow$	極小 (最小)	$\nearrow$	

$t = \dfrac{2}{3}$ のとき，$T(t)$ は最小で，その値は $T\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{32}{27}$ である。

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計

問題 3　座標平面上に原点 O と 2 点 A$(1,0)$，B$(-1,\sqrt{3})$ がある。線分 AB を $1:2$ に内分する点を C とする。また，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と同じ向きの単位ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ の成分表示をそれぞれ求めよ。

(2) 3 点 P，Q，R があり，それらの位置ベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=u\overrightarrow{e_3}$ であるとする。ただし，s, t, u は正の実数である。この 3 点 P，Q，R が同一直線上にあるとき，u を s と t で表せ。

(3) (2) の 3 点 P，Q，R について，点 R が線分 PQ の中点であるとき，t, u をそれぞれ s で表せ。

解答例

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$ であるから，$\overrightarrow{e_2}=\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。また，点 C は線分 AB を $1:2$ に内分するので，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ である。よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$ となるから，$\overrightarrow{e_3}=\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

(2) 異なる 3 点 P，Q，R が同一直線上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ となる実数 k がある。$\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，すなわち $u\overrightarrow{e_3}=(1-k)s\overrightarrow{e_1}+kt\overrightarrow{e_2}$ が成り立つ。これを成分で書くと，

$$u\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(1-k)s\,(1,0)+kt\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

となる。$\overrightarrow{e_1}\neq\overrightarrow{0}$，$\overrightarrow{e_2}\neq\overrightarrow{0}$ で，$\overrightarrow{e_1}$ と $\overrightarrow{e_2}$ は平行でないから，

$$\begin{cases}\dfrac{u}{2}=(1-k)s-\dfrac{kt}{2} & \cdots ① \\[2ex] \dfrac{\sqrt{3}\,u}{2}=\dfrac{\sqrt{3}\,kt}{2} & \cdots ②\end{cases}$$

である。② と $t>0$ より $k=\dfrac{u}{t}$ であるから，① に代入して $u=2\left(1-\dfrac{u}{t}\right)s-u$ となり，これより $s+t>0$ と合わせて，$u=\dfrac{st}{s+t}$ となる。

(3) R は線分 PQ の中点なので，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ であるから，(2) における k の値は $\dfrac{1}{2}$ である。これを (2) の ①,② に代入して整理すると

$$\begin{cases}u=s-\dfrac{1}{2}t \\[2ex] u=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$$

となる。よって，$u=\dfrac{1}{2}s,\ t=s$ が得られる。

（教育　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 3）

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計