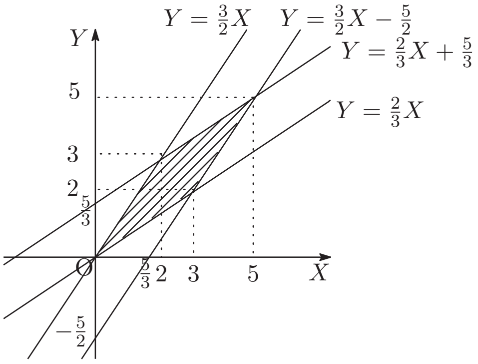
令和２年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその１）

1 (1) $a, b$ は整数 $p, q$ を用いて $a = 3p+1,\ b = 3q+1$ と表せる。
$ab = 3(3pq+p+q)+1$ より，$ab$ を 3 で割った余りは 1 である。

$m, n$ は 3 の倍数でないので，整数 $p$ を用いて $3p+1$ あるいは $3p+2$ とかける。
それぞれの平方は，$(3p+1)^2 = 3(3p^2+2p)+1$ および $(3p+2)^2 = 3(3p^2+4p+1)+1$ となり，3 で割った余りは 1 である。
$m^2$ と $n^2$ はいずれも 3 で割った余りは 1 となるので，$m^2+n^2$ を 3 で割った余りは 2 となる。

(2) $X = 3x+2y,\ Y = 2x+3y$ より，$x = \frac{3}{5}X - \frac{2}{5}Y,\ y = \frac{3}{5}Y - \frac{2}{5}X$ となる。$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ より、$(X, Y)$ は不等式 $0 \leqq \frac{3}{5}X - \frac{2}{5}Y \leqq 1,\ 0 \leqq \frac{3}{5}Y - \frac{2}{5}X \leqq 1$ を満たす領域にあるので，次の図の斜線部とその境界が求める領域である。




(3) $z$ が実数であると仮定する。このとき，ある整数 $m$ が存在して $\arg(z) = m\pi$ が成立する。一方，

$$\arg(z) = n\arg\left(\sqrt{3}+i\right) + \arg\left(\sqrt{3}+3i\right) - \arg(-1+i) = \frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}$$

が成立している。したがって，

$$m\pi = \frac{n\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{4}$$

を得る。整理すると， $12m = 2n-5$ となる。左辺は偶数，右辺は奇数となり矛盾。よって， $z$ は実数でない。

| 受　験　番　号 |
| --- |
| |

| 小　　　計 |
| --- |
| |

数　　　学　そ　の　1
工　学　部・生　命　環　境　学　部

令和２年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその２ ）

2

(1) 直線 $y = 2ax$ と $C$ が接していることから，２次方程式 $0 = x^2 + 2(p-a)x + q$ は唯一つの解をもつ。判別式を考えると

$$(p-a)^2 - q = 0$$

である。同様に直線 $y = 2bx$ と放物線 $C$ が接していることから，

$$(p-b)^2 - q = 0$$

である。以上の二式より

$$0 = (p-a)^2 - (p-b)^2 = (2p-a-b)(b-a)$$

を得る。$a \fallingdotseq b$ であるから，$p = \dfrac{a+b}{2}$ である。また，$q = (p-a)^2 = \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$ である。

(2) $a = 2\cos\theta,\ b = 2\sin\theta \left(-\dfrac{3}{4}\pi < \theta < \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{5}{4}\pi\right)$ とおくと

$$p = \frac{2\cos\theta + 2\sin\theta}{2} = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

となる。ここで $\theta$ が $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{5}{4}\pi$ の範囲を動くとき，$\theta + \dfrac{\pi}{4}$ は $\dfrac{\pi}{2} < \theta + \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲を動くから，$p$ は $-\sqrt{2} < p < \sqrt{2}$ の範囲を動く。同様にして，$\theta$ が $-\dfrac{3}{4}\pi < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くときも，$p$ は $-\sqrt{2} < p < \sqrt{2}$ の範囲を動く。したがって，$p$ の動く範囲は区間 $-\sqrt{2} < p < \sqrt{2}$ である。

(3) $C$ の頂点を $(X, Y)$ とおく。$C$ を表す方程式を平方完成すると

$$y = x^2 + 2px + q = (x+p)^2 + q - p^2$$

となるから，$(X, Y) = (-p, q - p^2)$ である。(1) より

$$X = -p = -\frac{a+b}{2}, \quad Y = q - p^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = -ab$$

である。$a^2 + b^2 = 4$ より

$$X^2 = \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = 1 - \frac{Y}{2}$$

である。整理すると $Y = 2 - 2X^2$ となる。

(2) より，$X$ の動く範囲は $-\sqrt{2} < X < \sqrt{2}$ である。

以上より，$C$ の頂点の軌跡は

$$y = 2 - 2x^2 \quad \left(-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\right)$$

である。

| 受 験 番 号 |
| --- |
| |

| 小　　計 |
| --- |
| |

数　　学その２
工　学　部・生命環境学部

令和２年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその３ ）

3

(1) $x>0$ なので $\dfrac{x^2}{2}<e^x$ を示せばよい。

$g(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$ とおくと，$g'(x)=e^x-x,\ g''(x)=e^x-1$
$x>0$ のとき，$e^x>1$ であるから，$g''(x)>0$
したがって，$g'(x)$ は $x\geqq 0$ のとき，増加する。
$g'(0)=1$ であるから，$x>0$ のとき，$g'(x)>0$
したがって，$g(x)$ は $x\geqq 0$ のとき，増加する。
$g(0)=1$ であるから，$x>0$ のとき，$g(x)>0$
よって，$e^x>\dfrac{x^2}{2}$
$x>0$ において $0<f(x)<\dfrac{2}{x}$
ここで $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0$ であるから，はさみうちの原理より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$

(2) $f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$
$f''(x)=-e^{-x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$
これより $f(x)$ の増減および凹凸は次のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $0$ | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ | $\frac{2}{e^2}$ | ↘ |

また，変曲点は $\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$ である。

(3)

$$
\begin{aligned}
V&=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{f(x)\}^2dx\\
&=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}e^{-2x}x^2dx\\
&=\pi\left(\left[\frac{e^{-2x}}{-2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^{-2x}}{-2}\cdot 2x\,dx\right)\\
&=\pi\left(-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{8e}\right)+\pi\left(\left[\frac{e^{-2x}}{-2}x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{e^{-2x}}{-2}dx\right)\\
&=\pi\left(-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{8e}\right)+\pi\left(-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{4e}-\left[\frac{e^{-2x}}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\right)\\
&=\pi\left(-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{8e}\right)+\pi\left(-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{4e}-\frac{1}{4e^2}+\frac{1}{4e}\right)\\
&=\pi\left(-\frac{5}{4e^2}+\frac{5}{8e}\right)
\end{aligned}
$$



| 受験番号 |
|---|
| |

| 小　　計 |
|---|
| |

令和２年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその４ ）

4

(1) 両曲線が点 $(a_n, \log a_n)$ で共通の接線をもつ条件は，

$$p_n a_n^n = \log a_n \quad \text{かつ} \quad n p_n a_n^{n-1} = \frac{1}{a_n}$$

である。この式から $a_n$ と $p_n$ を求めると，

$$a_n = e^{\frac{1}{n}}, \quad p_n = \frac{1}{ne}$$

を得る。

(2) $A_n$, $B$ および $x$ 軸で囲まれた図形の面積は，

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{a_n} p_n x^n \, dx - \int_1^{a_n} \log x \, dx = \left[ \frac{p_n}{n+1} x^{n+1} \right]_0^{a_n} - \big[ x \log x - x \big]_1^{a_n} \\ &= \frac{p_n}{n+1} a_n^{n+1} - a_n \log a_n + a_n - 1 = \frac{1}{n(n+1)} e^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{1}{n}} - 1 \\ &= \frac{n}{n+1} e^{\frac{1}{n}} - 1 \end{aligned}$$

である。

(3) (2) より

$$n^2 S_n = \frac{n^3}{n+1} e^{\frac{1}{n}} - n^2$$

与えられた不等式より，

$$\begin{aligned} n^2 S_n &\geqq \frac{n^3}{n+1} \left( 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) - n^2 = \frac{1}{n+1} \left( n^3 + n^2 + \frac{n}{2} \right) - \frac{n^3 + n^2}{n+1} = \frac{n}{2(n+1)}, \\ n^2 S_n &\leqq \frac{n^3}{n+1} \cdot \frac{2n^2 - 1}{2n(n-1)} - n^2 = \frac{n^2(2n^2-1)}{2(n^2-1)} - \frac{2n^2(n^2-1)}{2(n^2-1)} = \frac{n^2}{2(n^2-1)} \end{aligned}$$

となる。

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2(1 + \frac{1}{n})} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{2(n^2-1)} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2(1 - \frac{1}{n^2})} = \frac{1}{2}$$

だから，はさみうちの原理より，$n^2 S_n$ は $\frac{1}{2}$ に収束する。

| 受 験 番 号 |
| --- |
| |

| 小　　計 |
| --- |
| |

数　　　学 そ の 4
工 学 部・生 命 環 境 学 部