令和 2 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教・生　数学I・A・II・B 表紙）

教育学部・生命環境学部

・試験開始までに，表紙の注意事項をよく読んでください。
・筆記用具は，試験開始まで，手にとってはいけません。

（注　意　事　項）

1. 試験開始の合図の後，すぐに用紙の種類と枚数（4 枚）を確かめて，すべての用紙に受験番号を記入してください。
   この配布物には，次の計 4 枚が含まれています。

   令和 2 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教・生　数学I・A・II・B 表紙）
   令和 2 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教・生　数学I・A・II・B その 1）
   令和 2 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教・生　数学I・A・II・B その 2）
   令和 2 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教・生　数学I・A・II・B その 3）

2. 試験終了後，配布されたすべての用紙を回収します。
3. 配布された用紙が上記 1. と異なっているときや印刷が不鮮明なときには，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 各「試験問題並びに答案用紙」の右下隅にある小計の欄には何も記入してはいけません。
5. 解答を書ききれないときは，その問題が記載してある用紙の裏面を利用してもかまいません。その場合は，問題記載の面の右下方に「裏面使用」と記入してください。

受　験　番　号

問題 1 次の問いに答えよ。答えだけでなく，どのように考えたのか，途中の計算および説明も書け。

(1) 山梨大学のある学科の学生数は 30 名であった。このうち，山梨県内出身の学生数が 17 名，山梨県外出身または身長が 170 cm 未満の学生数が 26 名であった。山梨県内出身かつ身長が 170 cm 未満の学生数を求めよ。

(2) $\triangle$ABC において A, B はともに鋭角で，$\mathrm{AB}=14,\ \sin A=\dfrac{4}{5},\ \sin B=\dfrac{12}{13}$ とする。$a=\mathrm{BC},\ b=\mathrm{CA}$ をそれぞれ求めよ。

(3) 600 を互いに素である 2 つの自然数の積として表す方法は何通りあるか求めよ。ただし，2 つの相異なる数 A, B に対して，$600=A\times B$ と $600=B\times A$ は区別するものとする。たとえば，$600=1\times 600$ と $600=600\times 1$ は区別する。

(4) $(4a+3b+2c+d)^4$ を展開したときの $abcd$ の係数を求めよ。

解答例

(1) この学科の学生全体の集合を U とし，U の中で山梨県内出身者の集合を P，U の中で身長 170 cm 以上の者の集合を Q とする。また，一般に集合 A の要素の個数を $n(A)$ と表すことにする。このとき，$n(U)=30,\ n(P)=17$ で $n(\overline{P}\cup\overline{Q})=n(\overline{P\cap Q})=26$ となる。よって，$n(U)-n(\overline{P\cap Q})=n(\overline{\overline{P\cap Q}})=n(P\cap Q)=30-26=4$ なので，$n(P\cap\overline{Q})=n(P)-n(P\cap Q)=17-4=13$ となり，求める学生数は 13 名である。

(2) AB を底辺とする $\triangle$ABC の高さは $a\sin B=b\sin A$, すなわち，$\dfrac{12}{13}a=\dfrac{4}{5}b$ である。一方で $\mathrm{AB}=a\cos B+b\cos A$ である。ここで，A, B が鋭角であることより $\cos A=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}, \cos B=\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2}=\dfrac{5}{13}$ であるから，$14=\dfrac{5}{13}a+\dfrac{3}{5}b$ が得られる。a, b に関する 2 つの条件式を連立させて解くと $a=13,\ b=15$ となる。

(3) $600=2^3\times 3^1\times 5^2$ であるから, $600=A\times B$ ($A,\ B$ は互いに素) とし, $A=2^x\times 3^y\times 5^z$ とおくと, $B=2^{3-x}\times 3^{1-y}\times 5^{2-z}$ と書ける。A, B は互いに素であるので x と $3-x$, y と $1-y$, z と $2-z$ はそれぞれどちらか一方が 0 となる。よって, x, y, z の値の取り方はいずれも 2 通りずつ。したがって, 求める場合の数は $2\times 2\times 2=8$ 通り。

(4) まず，$x=4a,\ y=3b,\ z=2c$ として $(x+y+z+d)^4$ の $xyzd$ の係数を求めると，$(x+y+z+d)\times(x+y+z+d)\times(x+y+z+d)\times(x+y+z+d)$ を展開したときの $xyzd$ の係数なので，$x,\ y,\ z,\ d$ を並べる順列の数 $4!=24$ となる。$xyzd=4a\times 3b\times 2c\times d=24abcd$ となるが，この $xyzd$ 以外の項からは $abcd$ は現れないので，求める係数は $24\times 24=576$ である。

（教・生　数学I・A・II・B その1）

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計

問題 2　$t > 0$ に対し, $S(t) = \displaystyle\int_0^1 |x^2 - t^2|\,dx$ とおく。

(1) $S(t)$ を求めよ。

(2) t が $t > 0$ の範囲を動くとき, $S(t)$ の最小値を求めよ。

解答例

(1)

(i) $0 < t < 1$ のとき,

$$S(t) = \int_0^t \{-(x^2 - t^2)\}dx + \int_t^1 (x^2 - t^2)dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + t^2 x\right]_0^t + \left[\frac{x^3}{3} - t^2 x\right]_t^1 = \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}$$

(ii) $1 \leqq t$ のとき,

$$S(t) = \int_0^1 \{-(x^2 - t^2)\}dx$$
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + t^2 x\right]_0^1 = t^2 - \frac{1}{3}$$

(2) $0 < t < 1$ のとき $S'(t) = 4t^2 - 2t = 2t(2t-1)$, $1 < t$ のとき $S'(t) = 2t$ なので $S(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(t)$		$-$	0	$+$		$+$
$S(t)$		↘	極小	↗	$\frac{2}{3}$	↗

$t = \dfrac{1}{2}$ のとき, $S(t)$ は極小で $S\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$ である。よって増減表より最小値は $S\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$ である。

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計

問題 3　平面において 3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ があり，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行ではないとする。また，$\vec{a}\cdot\vec{c} = p$, $\vec{b}\cdot\vec{c} = q$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = r$ とおく。

(1) $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ のとき，$p = x + ry$ であることを示せ。

(2) (1) の x, y を p, q, r を用いて表せ。

(3) $\vec{a}$ と $\vec{b} - z\vec{a}$ が垂直になるように z を定めよ。また，このとき，$\vec{c} = s\vec{a} + t(\vec{b} - z\vec{a})$ を満たす s, t を p, q, r を用いて表せ。

解答例

(1) $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ より，両辺の $\vec{a}$ との内積を考えて $p = \vec{a}\cdot\vec{c} = x\vec{a}\cdot\vec{a} + y\vec{a}\cdot\vec{b} = x + ry.$

(2) (1) と同様に $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ の両辺の $\vec{b}$ との内積を考えて，$q = \vec{b}\cdot\vec{c} = x\vec{a}\cdot\vec{b} + y\vec{b}\cdot\vec{b} = rx + y.$ したがって x, y に関する連立方程式 $\begin{cases} x + ry = p \\ rx + y = q \end{cases}$ が得られる。ところで，$\vec{a}, \vec{b}$ のなす角を θ とすると，

$$r = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = \cos\theta$$

より $r^2 \leqq 1$ である。ここで，$r^2 = 1$ とすると，$\cos^2\theta = 1$, すなわち $\cos\theta = \pm 1$ となり，$\theta = 0°$, または $\theta = 180°$ が導かれる。これは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行ではないということに反し，$r^2 < 1$ である。したがって，上の連立方程式は解けて，$x = \dfrac{p - qr}{1 - r^2}$, $y = \dfrac{q - pr}{1 - r^2}$ となる。

(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$ はいずれも $\vec{0}$ ではなく平行ではないから，$\vec{b} - z\vec{a}$ は $\vec{0}$ ではなく，$\vec{a}$ と $\vec{b} - z\vec{a}$ が垂直になる条件は $\vec{a}\cdot(\vec{b} - z\vec{a}) = r - z = 0$ となる。したがって，$z = r$ である。これより，

$$\vec{c} = s\vec{a} + t(\vec{b} - r\vec{a}) = (s - tr)\vec{a} + t\vec{b} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

となる。x, y は (2) で求めたものである。$\vec{a}$, $\vec{b}$ は平行ではないから，$\begin{cases} s - tr = x \\ t = y \end{cases}$ でなければならない。ゆえに

$$t = y = \frac{q - pr}{1 - r^2}, \quad s = x + tr = x + yr = p$$

である。