令和２年度入学者選抜試験問題

物理基礎・物理その１（後期日程）〔解答例〕

問題１

(1)　台の速さを V とすると，運動量保存則より

$$mv_1\cos30^\circ + MV = 0 \qquad \therefore v_1 = -\frac{M}{m\cos30^\circ}V = -\frac{2M}{\sqrt{3}m}V \qquad \text{よって}\ \frac{2M}{\sqrt{3}m}\ \text{倍}$$

(2)　点 B での小球の鉛直方向の速さ v とすると，飛び出す角度が 30°　なので

$$v = v_1\sin30^\circ = \frac{1}{2}v_1$$

また，点 C では鉛直方向の速さが零となるので，飛び出したときの運動エネルギーの鉛直方向成分は全て位置エネルギーとなる。即ち

$$mgH_2 + \frac{1}{2}mv^2 = mgH_3 \qquad \therefore H_3 = H_2 + \frac{1}{2g}v^2 = H_2 + \frac{1}{2g}\left(\frac{1}{2}v_1\right)^2 = H_2 + \frac{v_1^{\ 2}}{8g}$$

点　C　での位置エネルギーが運動エネルギーの鉛直方向成分に全て変換されるので

$$mgH_3 = mg\left(H_2 + \frac{v_1^{\ 2}}{8g}\right) = \frac{1}{2}mv_2^{\ 2}$$

$$\therefore v_2 = \sqrt{2g\left(H_2 + \frac{v_1^{\ 2}}{8g}\right)} = \sqrt{2gH_2 + \frac{v_1^{\ 2}}{4}}$$

(3)　床に衝突直後の垂直方向速度を v_3 とすれば

$$e = \frac{|v_3|}{|v_2|} \qquad |v_3| = e|v_2| = e\sqrt{2gH_2 + \frac{v_1^{\ 2}}{4}}$$

運動エネルギーの鉛直方向成分の全てが点　E　での位置エネルギーに変換されるので

$$\frac{1}{2}mv_3^{\ 2} = mgH_4$$

$$\therefore H_4 = \frac{v_3^{\ 2}}{2g} = \frac{e^2v_2^{\ 2}}{2g} = \frac{e^2}{2g}\left(2gH_2 + \frac{v_1^{\ 2}}{4}\right) = e^2\left(H_2 + \frac{v_1^{\ 2}}{8g}\right) = e^2H_3$$

(4)　小球が点 D で衝突してから点 F で衝突するまでの時間 t_1 は

$$0 = -\frac{1}{2}gt_1^{\,2} + v_3 t_1 = \left(v_3 - \frac{1}{2}gt_1\right)t_1$$

$$\therefore t_1 = \frac{2v_3}{g} = \frac{2}{g}\sqrt{2gH_4} = \sqrt{\frac{8H_4}{g}} \qquad \because \frac{1}{2}mv_3^2 = mgH_4 \Rightarrow v_3 = \sqrt{2gH_4}$$

$$= e\sqrt{\frac{8}{g}\left(H_2 + \frac{v_1^{\,2}}{8g}\right)} = \frac{e}{g}\sqrt{8gH_2 + v_1^{\,2}}$$

ここで (3)の結果から分かるように，小球が床に衝突するごとに小球の最高到達点は e^2 倍される。

故に，小球が 1 回衝突してから n 回衝突するまでの時間は

$$t_n = \sqrt{\frac{8H_4}{g}} + e\sqrt{\frac{8H_4}{g}} + e^2\sqrt{\frac{8H_4}{g}} + \cdots + e^{n-2}\sqrt{\frac{8H_4}{g}}$$

$$= \frac{\left(e^{n-1}-1\right)\sqrt{\dfrac{8H_4}{g}}}{e-1} = \frac{\left(e^{n-1}-1\right)\times\dfrac{e}{g}\sqrt{8gH_2 + v_1^{\,2}}}{e-1} = \frac{e\left(e^{n-1}-1\right)\sqrt{8gH_2 + v_1^{\,2}}}{g\left(e-1\right)}$$

問題２

（１）

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{\left(\varepsilon\frac{S}{\frac{d}{2}}\right)}+\frac{1}{\left(\varepsilon_0\frac{S}{\frac{d}{2}}\right)}=\frac{d}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon S}+\frac{d}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon_0 S}=\frac{d}{2S}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)\qquad C=\frac{2S}{d}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)}$$

（２）

$$Q=CV=\frac{2S}{d}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)}V\qquad U_1=\frac{1}{2}QV=\frac{S}{d}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)}V^2$$

（３）　図２での静電容量をC'，極板間の電圧をV'とすると，

$$\frac{1}{C'}=\frac{1}{\left(\varepsilon\frac{S}{\frac{d}{2}}\right)}+\frac{1}{\left(\varepsilon_0\frac{S}{\frac{d}{2}+x}\right)}=\frac{d}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon S}+\frac{d+2x}{2}\cdot\frac{1}{\varepsilon_0 S}=\frac{1}{2S}\left(\frac{d}{\varepsilon}+\frac{d+2x}{\varepsilon_0}\right)$$

$$C'=2S\cdot\frac{1}{\left(\frac{d}{\varepsilon}+\frac{d+2x}{\varepsilon_0}\right)}$$

Q が変わらないので，

$$Q=CV=C'\ V'\qquad V'=\frac{C}{C'}V=\frac{\left(\frac{d}{\varepsilon}+\frac{d+2x}{\varepsilon_0}\right)}{d\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)}V$$

$$U_2=\frac{1}{2}QV'=\frac{1}{2}\left(\frac{2S}{d}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)}V\right)\frac{\left(\frac{d}{\varepsilon}+\frac{d+2x}{\varepsilon_0}\right)}{d\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)}V=\frac{S}{d^2}\cdot\frac{\left(\frac{d}{\varepsilon}+\frac{d+2x}{\varepsilon_0}\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)^2}V^2$$

（４）

$$\Delta U=U_2-U_1=\frac{S}{d^2}\cdot\frac{\left(\frac{d}{\varepsilon}+\frac{d+2x}{\varepsilon_0}\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)^2}V^2-\frac{S}{d}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)}V^2$$

$$=\frac{S}{d^2}\cdot\frac{\left(\frac{d}{\varepsilon}+\frac{d+2x}{\varepsilon_0}\right)-\left(\frac{d}{\varepsilon}+\frac{d}{\varepsilon_0}\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)^2}V^2=\frac{S}{d^2}\cdot\frac{\frac{2x}{\varepsilon_0}}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)^2}V^2$$

$\Delta U=F\cdot x$なので，

$$F=\frac{\Delta U}{x}=\frac{S}{d^2}\cdot\frac{\frac{2}{\varepsilon_0}}{\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon_0}\right)^2}V^2$$

問題 3

(1) 変化後の理想気体の状態方程式 $(p+\Delta p)(V+\Delta V) = nR(T+\Delta T)$ の両辺から変化前の状態方程式 $pV = nRT$ の両辺を引くと $p\cdot\Delta V + \Delta p\cdot V + \Delta p\cdot\Delta V = nR\,\Delta T$ となる。この結果の$\Delta p\cdot\Delta V$ を無視し，さらに $pV = nRT$ の両辺で割ると， $(\Delta p/p) + (\Delta V/V) = (\Delta T/T)$ が得られる。

答　$(\Delta p/p) + (\Delta V/V) = (\Delta T/T)$

(2) 断熱変化においては気体が外部に成した仕事 $p\cdot\Delta V$ が，内部エネルギーの減少 $-\Delta U$と等しくなる。理想気体においては nをモル数として $U = n\,C_V\cdot T$ であるから，$p\cdot\Delta V = -n\,C_V\cdot\Delta T$ が得られ，両辺をさらに理想気体の状態方程式 $pV = nRT$ で割ると $\Delta V/V = -(C_V/R)\,\Delta T/T$ が得られる。

答　$a = -(C_V/R)$

(3) (2) の結果から，温度を消去すれば，体積の変化率と圧力の変化率の関係が導かれる。(1) より $\Delta T/T = \Delta V/V + \Delta p/p$ であるから，これを (2) の結果に代入して，$\Delta V/V = -(C_V/R)(\Delta V/V + \Delta P/P)$となり，

変形すると $(1 + C_V/R)\,\Delta V/V = -(C_V/R)\,\Delta p/p$， $\Delta V/V = -C_V/(R + C_V)\cdot\Delta p/p$

答　$\Delta V/V = -C_V/(R + C_V)\cdot\Delta p/p$

(4)

(ア)　地上では 2 つの風船の体積が同じであり，内部気体の圧力，温度も等しかったので，2 つの風船内部の気体のモル数は等しい。上空においても両者の温度と圧力が同じならば，同じモル数の理想気体の体積は等しく、2 つの風船の体積は等しい。

(イ)　単原子分子のヘリウムでは $C_V = (3/2)R$，2 原子分子の水素では $C_V = (5/2)R$であるため，(3)の結果より，気圧減少に伴う体積膨張率は水素の方が大きく，水素風船の方が大きくなる。

問題４

(1)　$\lambda L / d$

(2)　鏡面反射で位相がπずれるので、(1)の暗線の位置が明線になる。
$\lambda L / 2d$

(3)

①　$(L/2)(1+n)\theta_1$

②　$(L/2)(1+n)\theta_2$

③　$1/n$

④　$2\pi n\ (1+n) L(\theta_2^{\,2} - \theta_1^{\,2}) / 4\lambda$

⑤　$(L/2)(1+n)(\theta_2 - \theta_1)$

⑥　$(L/4)(1+n)(\theta_2 + \theta_1)$

⑦　$4\pi n d\,\mathrm{OP} / (1+n)\lambda L$

⑧　$(1+n)\lambda L/(2n\ d)$