平成３１年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその１）

1　(1)　最初に表が出たとき，その後 A が勝つためには，

- 表が３回続けて出る
- 表が２回と裏が１回出て，その後に表が出る
- 表が２回と裏が２回出て，その後に表が出る
- 表が２回と裏が３回出て，その後に表が出る

のいずれか。硬貨を投げる試行は独立なので，それぞれの確率は

$$\frac{1}{2^3},\quad \frac{{}_3C_2}{2^3}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2^4},\quad \frac{{}_4C_2}{2^4}\times\frac{1}{2}=\frac{6}{2^5},\quad \frac{{}_5C_2}{2^5}\times\frac{1}{2}=\frac{10}{2^6}$$

これらは排反であるから，全体の確率は

$$\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{6}{2^5}+\frac{10}{2^6}=\frac{21}{32}$$

---

(2)　$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$ であり，x と θ の対応は $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline \theta & 0 & \to & \frac{\pi}{3} \end{array}$ だから，

$$\int_0^1 \sqrt{4-3x^2}\,dx=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta$$

となる。$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき $\cos\theta\geqq 0$ だから，$\sqrt{1-\sin^2\theta}=\cos\theta$ となる。よって，

$$\int_0^1\sqrt{4-3x^2}\,dx=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi+\frac{1}{2}$$

となる。

---

(3)

$$\frac{a^3+a}{a+1}=\frac{b^3+b}{b+1}=\frac{c^3+c}{c+1}=k$$

とおくと，

$$\begin{cases} a^3+a=k(a+1) & \cdots \text{①} \\ b^3+b=k(b+1) & \cdots \text{②} \\ c^3+c=k(c+1) & \cdots \text{③} \end{cases}$$

① − ② より $a^3-b^3+a-b=(a-b)(a^2+ab+b^2+1)=k(a-b)$，$a\fallingdotseq b$ より $a^2+ab+b^2+1=k$　$\cdots$　④
① − ③ より $a^3-c^3+a-c=(a-c)(a^2+ac+c^2+1)=k(a-c)$，$a\fallingdotseq c$ より $a^2+ac+c^2+1=k$　$\cdots$　⑤
④ − ⑤ より $ab-ac+b^2-c^2=(b-c)(a+b+c)=0$
$b\fallingdotseq c$ だから $a+b+c=0$

受験番号

小　　計

数　　学その１
工学部・生命環境学部

平成３１年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその２）

2

(1)

$$a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$a_2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} + \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = 3$$

$$a_3 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3 = \frac{1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}}{8} + \frac{1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}}{8} = 4$$

(2)　$a_n + a_{n+1}$ を計算すると

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} \\ &= a_{n+2} \end{aligned}$$

となる。

(3)　[1] $n = 1, 2$ のとき, (1) より a_n は自然数である。
[2] $n = k, k+1$ のとき, a_k, a_{k+1} がともに自然数になると仮定する。
$n = k+2$ のときを考えると，(2) より $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ なので a_{k+2} も自然数である。
[1]，[2] から，すべての n について，a_n は自然数となる。

(4)　(2) より $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ が成り立つ。a_{n+1} と a_n の最大公約数を d とすると，自然数 ℓ, m を用いて $a_{n+1} = \ell d$, $a_n = md$ と表される。$a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = \ell d - md = (\ell - m)d$ より，d は a_{n-1} の約数でもある。同様に $a_{n-2} = a_n - a_{n-1}$ より，d は a_{n-2} の約数でもある。これを続けると d は $a_1 = a_3 - a_2 = 4 - 3 = 1$ の約数であり $d = 1$ となることがわかる。よって a_{n+1} と a_n は互いに素である。

受 験 番 号

小　　計

平成３１年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその３）

3

(1)　放物線 C の式において $\dfrac{dy}{dx}=2ax$ なので，C 上の点 $\mathrm{P}(r,\, ar^2+b)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y=2ar(x-r)+ar^2+b=2arx-ar^2+b$$

よって，y 軸との交点の座標は $(0,\, -ar^2+b)$

(2)　円錐 T の底面の円の半径を R とすると R は ℓ と x 軸が交わるときの x 座標に等しい。(1) で求めた ℓ の方程式より，ℓ と x 軸との交点の x 座標は $\dfrac{ar^2-b}{2ar}$ だから $R=\dfrac{ar^2-b}{2ar}$

T の体積 V は $V=\dfrac{\pi}{3}R^2h=\dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{ar^2-b}{2ar}\right)^2h=\dfrac{\pi}{12}\cdot\dfrac{(ar^2-b)^2}{a^2r^2}\cdot h$

(1) より $h=-ar^2+b$ だから

$(ar^2-b)^2=(-ar^2+b)^2=h^2$

$a^2r^2=a(b-h)$

よって $V=\dfrac{\pi}{12}\cdot\dfrac{h^3}{a(b-h)}$

(3)　V を h で微分すると

$$\frac{dV}{dh}=\frac{\pi}{12a}\cdot\frac{3h^2\cdot(b-h)-h^3\cdot(-1)}{(b-h)^2}=\frac{\pi}{12a}\cdot\frac{h^2(3b-2h)}{(b-h)^2}$$

これをもとに $a<0$ に注意して増減表を書くと以下のようになる。

h	b	$\cdots$	$\frac{3b}{2}$	$\cdots$
V'	／	$-$	0	$+$
V	／	↘	極小	↗

よって V は $h=\dfrac{3b}{2}$ のとき最小となる。このときの T の体積 V は $V=\dfrac{\pi}{12a}\cdot\dfrac{\left(\frac{3b}{2}\right)^3}{\left(-\frac{b}{2}\right)}=-\dfrac{9b^2}{16a}\pi$

数　学　そ　の　3
工　学　部・生命環境学部

受　験　番　号

小　　計

平成３１年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲその４）

4

(1) $x'(t) = 2 - \cos t$ である。$-1 \leqq \cos t \leqq 1$ であるから，$x'(t) > 0$ である。よって，$x(t)$ はつねに増加する。さらに $x(0) = 0,\ x(\pi) = 2\pi$ であるから，$x(t)$ のとり得る値の範囲は $0 \leqq x(t) \leqq 2\pi$ である。

(2) $y'(t) = \cos^4 t - 3\sin^2 t \cos^2 t$ である。

(3) $y(t) = 0$ であるためには $\sin t = 0$ または $\cos t = 0$ であればよい。$\sin t = 0$ となるのは $t = 0, \pi$ のとき。$\cos t = 0$ となるのは $t = \dfrac{\pi}{2}$ のとき。
$y'(t)$ を整理すると

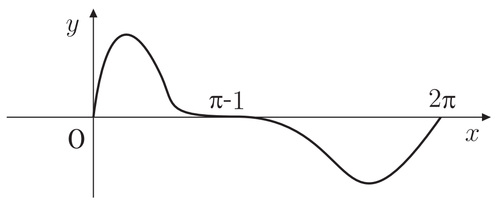
$$\begin{aligned} y'(t) &= \cos^4 t - 3\sin^2 t\cos^2 t = \cos^4 t - 3(1-\cos^2 t)\cos^2 t = 4\cos^4 t - 3\cos^2 t \\ &= 4\cos^2 t\left(\cos^2 t - \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

となる。$y'(t) = 0$ とすると $\cos t = 0$ または $\cos t = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，$t = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5}{6}\pi$ である。これより増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	π
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{16}$	$\nearrow$	0

増減表より，$y(t)$ の最大値は $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$ である。

(4) $x(t)$ がつねに増加することと (3) の増減表より，C はおおよそ次の形をしている。



よって

$$S = \int_0^{\pi-1} y\,dx$$

である。x と t の対応は

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \pi - 1 \\ \hline t & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \end{array}$$

であるから

$$S = \int_0^{\pi-1} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,\frac{dx}{dt}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^3 t(2 - \cos t)\,dt$$

となる。ここで $u = \cos t$ とおくと，$\dfrac{du}{dt} = -\sin t$, $\begin{array}{c|ccc} t & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \\ \hline u & 1 & \to & 0 \end{array}$ より

$$S = \int_1^0 (u^4 - 2u^3)\,du = \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{2}\right]_1^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

である。

受　験　番　号

小　　　計