教育学部・生命環境学部

・試験開始までに，表紙の注意事項をよく読んでください。
・筆記用具は，試験開始まで，手にとってはいけません。

（注　意　事　項）

1. 試験開始の合図の後，すぐに用紙の種類と枚数（4 枚）を確かめて，すべての用紙に受験番号を記入してください。この配布物には，次の計 4 枚が含まれています。

   平成 31 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教・生　数学I・A・II・B 表紙）
   平成 31 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教・生　数学I・A・II・B その 1）
   平成 31 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教・生　数学I・A・II・B その 2）
   平成 31 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教・生　数学I・A・II・B その 3）

2. 試験終了後，配布されたすべての用紙を回収します。
3. 配布された用紙が上記 1. と異なっているときや印刷が不鮮明なときには，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 各「試験問題並びに答案用紙」の右下隅にある小計の欄には何も記入してはいけません。
5. 解答を書ききれないときは，その問題が記載してある用紙の裏面を利用してもかまいません。その場合は，問題記載の面の右下方に「裏面使用」と記入してください。

受 験 番 号

平成 31 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　(教・生　数学I・A・II・B その 1)

問題 1

(1) 山梨の主要な果物であるブドウ，モモ，スモモをもらった。もらった数は，多い方からブドウ，モモ，スモモの順であった。ブドウの数はスモモの数の 3 倍あった。また，モモの数の 2 倍とスモモの数の 3 倍を足すと 21 個であった。もらった果物の総数を求めよ。ただし，ブドウは 1 房を 1 個として扱うものとする。

(2) 次の実数を小さい方から順に並べよ。またその順になる理由を説明せよ。

$$\frac{1}{2},\qquad \log_{50} 7,\qquad \sqrt[3]{0.13}$$

(3) 赤玉 p 個，青玉 q 個，白玉 r 個の合計 n 個のすべてを 1 列に並べてできる順列の総数は，同じものを含む順列の総数の公式から $\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$ である。この公式が成り立つ理由を説明せよ。

(4) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y = \cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

解答例

(1) ブドウ，モモ，スモモの数をそれぞれ x, y, z とすると，これらは整数で，$x > y > z > 0$, $x = 3z$, $2y + 3z = 21$ となっている。$2y + 3z = 21$ から $2y = 21 - 3z$ となり左辺が偶数なので右辺も偶数である。したがって，$3z$ は奇数となり z も奇数でないといけない。$0 < 3z < 21$ なので $z = 1, 3, 5$ の可能性しかない。このうち $z = 1$ のときは，$x = 3$ で $y = 9$ となり，$x > y > z$ に反するので不可。$z = 3$ のときは，$x = 9$ で $y = 6$ となり，この場合は条件にあてはまる。$z = 5$ のときは，$x = 15$ で $y = 3$ となり，$x > y > z$ に反するので不可。以上より，ブドウ 9 個，モモ 6 個，スモモ 3 個であることがわかり，もらった果物の総数は 18 個である。

(2) 小さい順に $\log_{50} 7 < \frac{1}{2} < \sqrt[3]{0.13}$ となる。その理由を説明するため $a = \frac{1}{2}, b = \log_{50} 7, c = \sqrt[3]{0.13}$ とおく。
$50^a = \sqrt{50} > 7 = 50^b$ で、$50 > 1$ なので $y = 50^x$ は増加関数であり，$a > b$ がわかる。
次に，$a^3 = \frac{1}{8} = 0.125 < 0.13 = c^3$ で，$y = x^3$ は増加関数なので $a < c$ がわかる。
よって，$b < a < c$ である。

(3) 赤玉 p 個に a_1 から a_p まで印を付け区別する。同様に青玉 q 個に b_1 から b_q まで，白玉 r 個に c_1 から c_r まで印を付け区別する。この異なる n 個の玉のすべてを 1 列に並べる場合の数は先頭が n 通り，次は $n-1$ 通り，その次は $n-2$ 通りと順に減っていって最後は 1 通りで，これらをかけた $n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$ 通りの場合がある。この中で，赤玉の配置に着目すると同じ配置となるのは $a_1, a_2, \ldots, a_p$ の並べ替えの $p!$ 通りある。よって赤玉 p 個を区別しない並べ方は $n!/p!$ 通りある。さらにこれらについて青玉の配置に着目すると，同じ配置となるのは $b_1, b_2, \ldots, b_q$ の並べ替えの $q!$ 通りあり，青玉 q 個を区別しない並べ方は $n!/(p!q!)$ 通りある。これらについて，同様に考えて白玉 r 個を区別しない並べ方は $n!/(p!q!r!)$ 通りとなり，公式が成り立つことが，説明された。

別の解法：組合せの数を用いて説明することもできる。

(4) 倍角の公式から $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(\cos 2\theta + 1)$, $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ であり，これらを用いて式変形すると $\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta - \sin 2\theta) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}\sin(2\theta + \frac{3\pi}{4}))$ である。
$0 \leqq \theta \leqq \pi$ なので，$\frac{3\pi}{4} \leqq 2\theta + \frac{3\pi}{4} \leqq 2\pi + \frac{3\pi}{4}$ となり，この範囲での $\sin(2\theta + \frac{3\pi}{4})$ の値は，
$2\theta + \frac{3\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 1，$2\theta + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$ のとき最小値 -1 となりこれ以外では最大値，最小値をとらない。
以上より，$\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta$ の最大値 $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$，最小値 $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ であり，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲では，最大値となるのは $\theta = \frac{7\pi}{8}$ のときだけ，最小値となるのは $\theta = \frac{3\pi}{8}$ のときだけである。

(教・生　数学I・A・II・B その 1)

(解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。)

受 験 番 号

小　計

問題 2 p, q を定数とする。関数 $f(x) = 2x^3 + px^2 + qx + 1$ は $x = 1$ で極値をとり，$\displaystyle\int_0^2 \{f(x+1) - f(x)\}dx = 26$ を満たす。

(1) p, q を求めよ。

(2) a を定数とする。方程式 $f(x) = a$ の異なる実数解の個数を求めよ。

解答例

(1) $f'(x) = 6x^2 + 2px + q$ であり $x = 1$ で極値をとるので $f'(1) = 6 + 2p + q = 0$

また，

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= \{2(x+1)^3 + p(x+1)^2 + q(x+1) + 1\} - \{2x^3 + px^2 + qx + 1\} \\ &= 2\{(x+1)^3 - x^3\} + p\{(x+1)^2 - x^2\} + q\{(x+1) - x\} \\ &= 2(3x^2 + 3x + 1) + p(2x+1) + q \\ &= 6x^2 + 2(p+3)x + p + q + 2 \end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} \int_0^2 \{f(x+1) - f(x)\}dx &= \int_0^2 \{6x^2 + 2(p+3)x + p + q + 2\}dx \\ &= \Big[\ 2x^3 + (p+3)x^2 + (p+q+2)x\ \Big]_0^2 \\ &= 16 + 4(p+3) + 2(p+q+2) \\ &= 6p + 2q + 32 \end{aligned}$$

以上で定まる連立方程式

$\begin{cases} 6 + 2p + q = 0 \\ 6p + 2q + 32 = 26 \end{cases}$ から $\begin{cases} 2p + q = -6 \\ 3p + q = -3 \end{cases}$ となりこれを解いて，$p = 3, q = -12$ である。

(2) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x-1)(x+2)$ であるから関数 $y = f(x)$ の増減表は以下の通りとなる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	21	$\searrow$	-6	$\nearrow$

このことから，$f(x) = a$ の異なる実数解の個数は

$$\begin{cases} a < -6 \text{ または } a > 21 & \text{のとき 1 個} \\ a = -6 \text{ または } a = 21 & \text{のとき 2 個} \\ -6 < a < 21 & \text{のとき 3 個} \end{cases}$$

である。

受 験 番 号

小　計

問題 3　原点を $\mathrm{O}(0,0,0)$ とする xyz 空間内に 3 点 $\mathrm{A}(0,0,a), \mathrm{B}(p,0,b), \mathrm{C}(0,q,c)$ がある。ただし，a,b,c,p,q は正の実数とする。また，点 A と点 B の距離は $a+b$，点 A と点 C の距離は $a+c$，点 B と点 C の距離は $b+c$ であるとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) p を a と b で表せ。また q を a と c で表せ。さらに，$a=\dfrac{bc}{b+c}$ となることを示せ。

(2) 点 B から x 軸に垂線を引き，その交点を B' とする。また点 C から y 軸に垂線を引き，その交点を C' とする。このとき，$\mathrm{B}, \mathrm{B}', \mathrm{C}, \mathrm{C}'$ の 4 点は同一平面 α 上にあることを示せ。また，点 A から平面 α に垂線を引き，その交点を D とするとき，点 D の座標を b と c で表せ。

(3) 点 A を頂点とする三角錐 A-OB$'$C$'$ の体積 V_1，および点 A を頂点とする四角錐 A-BB$'$C$'$C の体積 V_2 のそれぞれを，b と c で表せ。また，それらを用いて次の等式が成立することを示せ。

$$V_1+V_2=\frac{a+b+c}{3}\times\frac{pq}{2}$$

解答例

(1) 空間内の 2 点間の距離の公式と与えられた条件より
$\mathrm{AB}=\sqrt{(p-0)^2+(0-0)^2+(b-a)^2}=a+b,\ \mathrm{AC}=\sqrt{(0-0)^2+(q-0)^2+(c-a)^2}=a+c,$
$\mathrm{BC}=\sqrt{(p-0)^2+(q-0)^2+(c-b)^2}=b+c$ である。これらの式をそれぞれ整理して

$$p^2=4ab\cdots\cdots(i),\ q^2=4ac\cdots\cdots(ii),\ p^2+q^2=4bc\cdots\cdots(iii)$$

が得られる。したがって，$p,q>0$ より $p=2\sqrt{ab}, q=2\sqrt{ac}$ がわかる。また，式 $(i),(ii)$ を式 (iii) に代入して $4ab+4ac=4bc$ が得られ，これから a を求めると，$a=\dfrac{bc}{b+c}$ となる。

(2) 点 B$'$ の座標は $(p,0,0)$，点 C$'$ の座標は $(0,q,0)$ なので，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{B'B}}=(0,0,b)$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=(0,0,c)$ は，平行である。よって，4 点 $\mathrm{B},\mathrm{B}',\mathrm{C}',\mathrm{C}$ は，同一平面上にある。($\overrightarrow{\mathrm{B'C}}=\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}+\overrightarrow{\mathrm{C'C}}=\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}+(c/b)\overrightarrow{\mathrm{B'B}}$ と表せるので。)
次に，平面 α 上の点 D について，実数 s,t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{B'D}}=t\overrightarrow{\mathrm{B'B}}+s\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}=(-sp,sq,tb)$ と表すことができる。これから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB'}}+\overrightarrow{\mathrm{B'D}}=((1-s)p,sq,tb-a)$ であり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ が，平面 α と直交するのは，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{B'B}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{B'C'}}$ のときである。これらのベクトルの直交条件を成分で表すと $(tb-a)b=0$ かつ $(s-1)p^2+sq^2=0$ である。
これから，$t=a/b, s=\frac{p^2}{p^2+q^2}$ がわかる。(1) の結果を用いて式変形すると $s=\frac{b}{b+c}$ となるので $a=\frac{bc}{b+c}$ を使って a を消去すると D の座標は $\left(\frac{2c\sqrt{ab}}{b+c},\frac{2b\sqrt{ac}}{b+c},a\right)=\left(\frac{2bc\sqrt{c(b+c)}}{(b+c)^2},\frac{2bc\sqrt{b(b+c)}}{(b+c)^2},\frac{bc}{b+c}\right)$ がわかる。

(3) 三角錐 A-OB$'$C$'$ の体積 V_1 は，底面積 $\frac{pq}{2}=2a\sqrt{bc}$ で高さ a なので，$V_1=\dfrac{2a\sqrt{bc}\times a}{3}=\dfrac{2b^2c^2\sqrt{bc}}{3(b+c)^2}$ である。
四角錐 A-BB$'$C$'$C の体積 V_2 については，底面の台形 BB$'$C$'$C の面積は $\frac{(b+c)\times2\sqrt{bc}}{2}=(b+c)\sqrt{bc}$，高さは (2) で得られた点 D の座標より $\mathrm{AD}=\frac{2bc}{(b+c)^2}\sqrt{c(b+c)+b(b+c)}=\frac{2bc}{b+c}$ となるので，$V_2=\frac{2bc\sqrt{bc}}{3}$ である。V_1 と V_2 を加えて整理すると

$$V_1+V_2=\frac{2bc\sqrt{bc}\,(b^2+3bc+c^2)}{3(b+c)^2}$$

一方，示すべき等式の右辺における p,q および a は，(1) の結果から b,c で表すことができ，式を整理すると

$$\frac{a+b+c}{3}\times\frac{pq}{2}=\frac{2(a+b+c)a\sqrt{bc}}{3}=\frac{2bc\sqrt{bc}\,(b^2+3bc+c^2)}{3(b+c)^2}$$ となる。よって，

$$V_1+V_2=\frac{a+b+c}{3}\times\frac{pq}{2}$$

が成立することが示された。

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受　験　番　号

小　計