平 成 30 年 度 入 学 者 選 抜 試 験

表紙（工学部・生命環境学部　数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲ）

(注 意 事 項)

1. 試験開始までに表紙の注意事項をよく読んでください。

2. 試験開始の合図があったら，すぐに種類と枚数が以下のとおりであることを確かめた上で，受験番号を８枚すべてに記入してください。

表紙		１枚
計算用紙　計算用紙１および計算用紙２	各１枚	計２枚
問題用紙		１枚
答案用紙（数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲその１）から（数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲその４）	各１枚	計４枚

3. 試験終了後，すべての用紙を回収します。

4. 配付された用紙が上記 2. と異なっているときや印刷が不鮮明なときは，手を挙げて監督者に知らせてください。

5. 出題された各問題に対する解答は，その問題番号が上部に印刷されている「答案用紙」に記入してください。
必要ならば，解答の続きを答案用紙の裏に書いてもかまいません。その場合，裏にも解答が書かれていることがはっきりと分かるように，表に書き示してください。

6. 「答案用紙」の右下隅にある小計の欄には何も記入してはいけません。

受 験 番 号

平 成 30 年 度 入 学 者 選 抜 試 験

計算用紙１ (工学部・生命環境学部 数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲ)

計算用紙は採点の対象になりません。必要事項は答案用紙に転記してください。

受 験 番 号

平 成 30 年 度 入 学 者 選 抜 試 験

計算用紙２ (工学部・生命環境学部 数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ)

計算用紙は採点の対象になりません。必要事項は答案用紙に転記してください。

受 験 番 号

平 成 30 年 度 入 学 者 選 抜 試 験

問題用紙 (工学部・生命環境学部 数学I・A・II・B・III)

1 (1) 関数 $f(x) = x^{12}e^{-x}$ について，$x \geqq 0$ における最大値の整数部分の桁数を求めよ。ただし，$\log_{10} 12 = 1.08$, $\log_{10} e = 0.43$ とする。

(2) 関数 $f(x) = 2\cos^2 \dfrac{x}{2} + \sin x + 3$ の区間 $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + 3k^2}$ を求めよ。

2 平面上の $\triangle$OAB の内部に点 P がある。線分 AP を $1:2$ に内分する点を Q，線分 OQ を $1:2$ に内分する点を R とする。また，P は線分 BR を $1:2$ に内分しているものとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(3) $\triangle$OAB の面積と $\triangle$OAP の面積の比を求めよ。

(4) $\mathrm{OA} = 5, \mathrm{OB} = 3$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直であるとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の値を求めよ。

3 座標平面上に放物線 $C : y^2 = 4x$ と点 $\mathrm{A}(-1, a)$ がある。ただし，a は実数とする。

(1) C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{p^2}{4}, p\right)$ における接線の方程式を p を用いた式で表せ。ただし，$p \neq 0$ とする。

(2) 点 A から C に引いた接線は 2 本存在することを証明せよ。また，それら 2 本の接線は直交することを証明せよ。

(3) 点 A から C に引いた 2 本の接線の接点を Q, R とする。直線 QR は C の焦点 F を通ることを証明せよ。

4 座標平面上で，t を媒介変数として，$x = t - \dfrac{1}{t}$, $y = t + \dfrac{1}{t}$ $(t > 0)$ で表される曲線を C とする。

(1) x が t について，つねに増加することを示せ。また，x がすべての実数を値にとることを示せ。

(2) y のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) t を消去することによって，x と y の関係を求めよ。

(4) $t = 2$ に対応する C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ における C の接線 l の方程式を求めよ。

(5) (4) で求めた l, C および y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

受 験 番 号

平成３０年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその１）

1 (1) $f'(x) = 12x^{11}e^{-x} - x^{12}e^{-x} = (12-x)x^{11}e^{-x}$ である。これより，$x \geqq 0$ における増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	12	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(12)$	$\searrow$

増減表より，$f(x)$ は $x=12$ で最大値 $f(12) = 12^{12}e^{-12}$ をとる。この数値の整数部分の桁数を調べるために，常用対数の値を求めると

$$\log_{10} f(12) = \log_{10} 12^{12}e^{-12} = 12(\log_{10} 12 - \log_{10} e) = 12 \times 0.65 = 7.8$$

となる。よって，$10^7 < f(12) < 10^8$ であるから，$f(12)$ の整数部分は 8 桁である。

(2) $f(x) = 2\cos^2 \dfrac{x}{2} + \sin x + 3 = 2 \cdot \dfrac{1+\cos x}{2} + \sin x + 3 = \cos x + \sin x + 4 = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + 4$

区間は $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ だから $-\dfrac{\pi}{4} \leqq x + \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3\pi}{4}$

最大値は $x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，つまり $x = \dfrac{\pi}{4}$ のときに $4 + \sqrt{2}$

最小値は $x + \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\pi}{4}$ のとき，つまり $x = -\dfrac{\pi}{2}$ のときに 3 となる。

(3) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+3k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+3\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+3x^2}\,dx$

$x = \dfrac{t}{\sqrt{3}}$ とおくと $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

x と t の対応は

x	$0 \to 1$
t	$0 \to \sqrt{3}$

$\displaystyle \int_0^1 \frac{1}{1+3x^2}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$t = \tan\theta$ とおくと $\dfrac{dt}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

t と θ の対応は

t	$0 \to \sqrt{3}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{3}$

$\displaystyle \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

数　学　そ　の　1
工　学　部・生 命 環 境 学 部

受 験 番 号

小　　計

平成３０年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその２）

2

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)=\dfrac{2}{27}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{27}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$\dfrac{26}{27}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{27}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{13}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{9}{13}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(3) 直線 OP と線分 AB の交点を S とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{9}{10}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

S は AB を $9:1$ に内分するから，$\triangle\mathrm{OAS}=\dfrac{9}{10}\triangle\mathrm{OAB}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{10}{13}\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ だから $\triangle\mathrm{OAP}=\dfrac{10}{13}\triangle\mathrm{OAS}=\dfrac{9}{13}\triangle\mathrm{OAB}$

よって，$\triangle\mathrm{OAB}:\triangle\mathrm{OAP}=13:9$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直だから

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{1}{13}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+9\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\dfrac{1}{13}\left(-\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2+9\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-8\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=0$

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=5,\ \left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|=3$ だから，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=7$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\right)=\dfrac{2}{3}(7-25)=-12$

数　　　学 そ の 2
工　学　部・生命環境学部

受　験　番　号

小　　計

3

(1) $y^2 = 4x$ の両辺を x で微分すると，$2y\dfrac{dy}{dx} = 4$

よって，$y \fallingdotseq 0$ のとき $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{y}$

したがって，求める接線の方程式は $y - p = \dfrac{2}{p}\left(x - \dfrac{p^2}{4}\right)$

すなわち，$y = \dfrac{2}{p}x + \dfrac{p}{2}$

(2) 原点における C の接線 $x = 0$ は $(-1, a)$ を通らない。

接線の方程式は (1) より $y = \dfrac{2}{p}x + \dfrac{p}{2}$ と表される。

接線が $(-1, a)$ を通るとき，$a = -\dfrac{2}{p} + \dfrac{p}{2}$

すなわち，$p^2 - 2ap - 4 = 0 \cdots (*)$

2 次方程式 $(*)$ の判別式を D とすると，$\dfrac{D}{4} = a^2 + 4 > 0$

$p = 0$ は明らかに 2 次方程式 $(*)$ の解ではないので，2 次方程式 $(*)$ は 0 と異なる 2 つの実数解を持つ。

したがって，点 A から C に引いた接線は 2 本存在する。

2 本の接線の接点の y 座標を s, t とすると，s, t は 2 次方程式 $(*)$ の 2 つの解である。

解と係数の関係から，$st = -4$

2 本の接線の傾きは $\dfrac{2}{s}, \dfrac{2}{t}$ だから，これらの積は $\dfrac{4}{st} = -1$ となり，2 本の接線は直交する。

(3) 焦点 F の座標は $(1, 0)$ である。

直線 QR の方程式は，

(i) $\dfrac{s^2}{4} \fallingdotseq \dfrac{t^2}{4}$ のとき $y - s = \dfrac{t - s}{\frac{t^2}{4} - \frac{s^2}{4}}\left(x - \dfrac{s^2}{4}\right)$

(ii) $\dfrac{s^2}{4} = \dfrac{t^2}{4}$ のとき $x = \dfrac{s^2}{4}$

(i) のとき $y = 0$ とおくと，$-s = \dfrac{4}{s + t}\left(x - \dfrac{s^2}{4}\right)$

すなわち，$x = -\dfrac{s(s + t)}{4} + \dfrac{s^2}{4} = -\dfrac{st}{4} = 1$

(ii) のとき $s \fallingdotseq t$ だから $t = -s$ となる。$st = -4$ より $s^2 = 4$ だから，直線 QR の方程式は $x = 1$

したがって，直線 QR は焦点 F を通る。

受　験　番　号

小　　　計

数　　　学 そ の 3
工　学　部・生 命 環 境 学 部

4

(1) $\dfrac{dx}{dt}=1+\dfrac{1}{t^2}>0$ だから，x は t について，つねに増加する。
x は t について連続で，$\displaystyle\lim_{t\to+0}x=-\infty$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}x=\infty$ だから，x は全ての実数をとる。

(2) $t>0$ だから,（相加平均）$\geqq$（相乗平均）より $y=t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$（等号は $t=1$ のときに成り立つ）
y は t について連続で，$\displaystyle\lim_{t\to+0}y=\lim_{t\to\infty}y=\infty$ だから，$y\geqq 2$

(3) $y^2-x^2=\left(t+\dfrac{1}{t}\right)^2-\left(t-\dfrac{1}{t}\right)^2=4$ より
$\left(\dfrac{y}{2}\right)^2-\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=1$ となり，
$y\geqq 2$ より，焦点が y 軸上にある直角双曲線のうち y 座標が正の部分である。

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$ に $t=2$ を代入して，P における接線の傾き $\dfrac{3}{5}$ を得る。
$\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right)$ を通る傾き $\dfrac{3}{5}$ の直線は $y=\dfrac{3}{5}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{5}{2}=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{8}{5}$
よって，l の方程式は $y=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{8}{5}$ である。

(5) x 軸，y 軸，l および直線 $x=\dfrac{3}{2}$ で囲まれた台形の面積は $\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{8}{5}+\dfrac{5}{2}\right)\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{123}{40}$

$S=\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}}y\,dx-\dfrac{123}{40}$ である。
$\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}}y\,dx$ において，$x=t-\dfrac{1}{t}$ とおく。
x と t の対応は

x	0	$\to$	$\frac{3}{2}$
t	1	$\to$	2

$$\int_0^{\frac{3}{2}}y\,dx=\int_1^2\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{dx}{dt}\,dt=\int_1^2\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\int_1^2\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2+2\log t-\frac{1}{2t^2}\right]_1^2=2\log 2+\frac{15}{8}$$
よって，$S=2\log 2+\dfrac{15}{8}-\dfrac{123}{40}=2\log 2-\dfrac{6}{5}$

受　験　番　号

小　　　計