平成 30 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　(教・生　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 表紙)

教育学部・生命環境学部

・試験開始までに，表紙の注意事項をよく読んでください。
・筆記用具は，試験開始まで，手にとってはいけません。

（注　意　事　項）

1. 試験開始の合図の後，すぐに用紙の種類と枚数（4 枚）を確かめて，すべての用紙に受験番号を記入してください。
   この配布物には，次の計 4 枚が含まれています。

   平成 30 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　(教・生　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 表紙)
   平成 30 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　(教・生　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 1)
   平成 30 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　(教・生　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 2)
   平成 30 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　(教・生　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B その 3)

2. 試験終了後，配布されたすべての用紙を回収します。
3. 配布された用紙が上記 1. と異なっているときや印刷が不鮮明なときには，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 各「試験問題並びに答案用紙」の右下隅にある小計の欄には何も記入してはいけません。
5. 解答を書ききれないときは，その問題が記載してある用紙の裏面を利用してもかまいません。その場合は，問題記載の面の右下方に「裏面使用」と記入してください。

(教・生　数学Ⅰ・A・Ⅱ・B 表紙)

受　験　番　号

問題 1

(1) 整式 $P(x)$ を $(x+1)(x-3)$ で割ると $3x+4$ 余り, $(x-1)(x-3)$ で割ると $5x-2$ 余る。このとき，$P(x)$ を $(x-1)(x+1)$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) 平面上の点 $\mathrm{A}(6,2)$ を通る傾き $-k$ の直線 ℓ を考える。ただし，$k>0$ とする。直線 ℓ が x 軸, y 軸と交わる点をそれぞれ B, C とし，原点を O とするとき，$\triangle\mathrm{OBC}$ の面積 $S(k)$ の最小値を求めよ。また，そのときの k の値を求めよ。

(3) 平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-a,0)$, $\mathrm{B}(a,0)$ に対し, $\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=3:1$ である点 P の軌跡を求めよ。ただし, a は正の実数とする。

(4) ある箱の中に赤色の玉が a 個, 緑色の玉が b 個, 青色の玉が c 個入っている。このとき, 箱から 1 個の玉を取り出す場合に赤色の玉が出る確率が $\dfrac{1}{2}$, 2 個の玉を同時に取り出す場合に赤色と緑色の玉が 1 個ずつ出る確率が $\dfrac{4}{25}$, 3 個の玉を同時に取り出す場合に全ての色の玉が 1 個ずつ出る確率が $\dfrac{9}{50}$ である。a, b, c を求めよ。

解答例

(1) $P(x)=Q(x)(x+1)(x-3)+3x+4$ (ここで $Q(x)$ は整式) と表せる。したがって，$P(-1)=3\cdot(-1)+4=1$ である。同様にして，$P(1)=5\cdot1-2=3$ となる。$P(x)=R(x)(x-1)(x+1)+ax+b$ (ここで $R(x)$ は整式) と表すと，$P(-1)=a\cdot(-1)+b=1$, $P(1)=a\cdot1+b=3$ であるから，$-a+b=1$, $a+b=3$ である。よって，$a=1$, $b=2$ となり，$P(x)$ を $(x-1)(x+1)$ で割った余りは $x+2$ である。

(2) 直線 ℓ の方程式は，$y-2=-k(x-6)$, つまり，$y=-kx+6k+2$ である。この直線 ℓ の方程式を用いて，$x=0$ のとき $y=6k+2=2(3k+1)$, $y=0$ のとき $0=-kx+6k+2$ より，$x=\dfrac{2(3k+1)}{k}$ である。したがって，点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{2(3k+1)}{k},0\right)$, $\mathrm{C}\big(0,2(3k+1)\big)$ である。

よって，$S(k)=\dfrac{1}{2}\cdot2(3k+1)\cdot\dfrac{2(3k+1)}{k}=\dfrac{2(3k+1)^2}{k}=2\cdot\dfrac{9k^2+6k+1}{k}=2\left(9k+\dfrac{1}{k}+6\right)$ が成り立つ。ここで，$k>0$ であるから，相加平均，相乗平均の関係より，$9k+\dfrac{1}{k}\geqq 2\sqrt{9k\cdot\dfrac{1}{k}}=6$ である。等号が成り立つのは，$9k=\dfrac{1}{k}$ のとき，つまり，$k=\dfrac{1}{3}$ のときである。

以上より，$S(k)\geqq S(\frac{1}{3})=24$ であり，$k=\dfrac{1}{3}$ のときに最小値 24 をとる。

(3) 条件を満たす任意の点を $\mathrm{P}(x,y)$ とすると $\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=3:1$ であるから, $\sqrt{(x+a)^2+y^2}:\sqrt{(x-a)^2+y^2}=3:1$　$\cdots$①
よって, $3\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$ であり，これより, $8x^2-20ax+8y^2+8a^2=0$ である。

$$\left(x-\frac{5}{4}a\right)^2+y^2=\left(\frac{3}{4}a\right)^2 \qquad \cdots ②$$

逆に, ② から ① が導かれ, これは $\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=3:1$ が成立することを意味するから, 円 ② 上の点は条件に適する。

以上より，求める軌跡は，中心が点 $\left(\dfrac{5}{4}a,0\right)$，半径が $\dfrac{3}{4}a$ の円である。

(4) 問題の事象は, どの場合でも同様に確からしい。その上で,

1 つ目の条件より, $\dfrac{a}{a+b+c}=\dfrac{1}{2}$ が成り立つ。よって, $b+c=a$　$\cdots$①

2 つ目の条件より, $\dfrac{{}_aC_1\cdot{}_bC_1}{{}_{a+b+c}C_2}=\dfrac{2ab}{(a+b+c)(a+b+c-1)}=\dfrac{4}{25}$ に ① を利用して, $\dfrac{b}{2a-1}=\dfrac{4}{25}$ である。よって, $b=\dfrac{4}{25}(2a-1)$　$\cdots$②

3 つ目の条件より, $\dfrac{{}_aC_1\cdot{}_bC_1\cdot{}_cC_1}{{}_{a+b+c}C_3}=\dfrac{9}{50}$ であるから，上記と同様に ① を利用して表すと $\dfrac{6abc}{2a(2a-1)(2a-2)}=\dfrac{9}{50}$ となる。さらに ② を利用して変形すると, $c=\dfrac{3}{4}(a-1)$　$\cdots$③

以上の ② と ③ を ① に代入すると, $a=13$ である。さらに ② に a を代入すると $b=4$ であり，同様にして, ③ から c を求めると $c=9$

　答え : $a=13$, $b=4$, $c=9$

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計

問題 2 xy 平面において連立不等式 $0 \leqq y \leqq 2x,\ 0 \leqq x \leqq 3,\ -x^2+4x-3 \leqq y \leqq 2$ の表す領域を D とし，実数 a は $0 \leqq a \leqq 2$ を満たし, 不等式 $a \leqq x \leqq a+1$ の表す領域と D との共通部分の面積を $S(a)$ とする。

(1) 区間 $0 \leqq a \leqq 1$ における $S(a)$ を求めよ。

(2) 区間 $1 < a \leqq 2$ における $S(a)$ を求めよ。

(3) 区間 $0 \leqq a \leqq 2$ における $S(a)$ の最大値および最小値を求めよ。

解答例

(1) $-x^2+4x-3 = -(x-1)(x-3) = 0$ とおくと，$x = 1, 3$ である。

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^1 2x\,dx + \int_1^{a+1} \left\{2-(-x^2+4x-3)\right\}dx \\ &= 1-a^2+\int_1^{a+1}(x^2-4x+5)\,dx \\ &= 1-a^2+\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_1^{a+1} = \frac{a^3}{3}-2a^2+2a+1 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{a+1} \left\{2-(-x^2+4x-3)\right\}dx \\ &= \int_a^{a+1}(x^2-4x+5)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}-2x^2+5x\right]_a^{a+1} = a^2-3a+\frac{10}{3} \end{aligned}$$

(3) $0 < a < 1$ のとき (1) より $S'(a) = a^2-4a+2$, $1 < a < 2$ のとき (2) より $S'(a) = 2a-3$ なので, $S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	1	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\frac{4}{3}$

$S(2-\sqrt{2}) = \dfrac{4\sqrt{2}-1}{3}$, $S(\frac{3}{2}) = \dfrac{13}{12}$, $1 < \dfrac{13}{12} < \dfrac{4}{3} < \dfrac{4\sqrt{2}-1}{3}$ であるから, $S(a)$ は, $a = 2-\sqrt{2}$ のとき最大値 $\dfrac{4\sqrt{2}-1}{3}$ をとり, $a = 0$ のとき最小値 1 をとる。

（教・生　数学 I・A・II・B その 2）

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計

問題 3 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。$a_1 = 2,\quad a_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{a_n}\quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(1) n を自然数とするとき，数学的帰納法を用いて，$2 \leqq a_n < 3$ を示せ。
(2) n を自然数とするとき，数学的帰納法を用いて，$a_n < a_{n+1}$ を示せ。
(3) n を自然数とするとき，数学的帰納法を用いて，$3 - a_n \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を示せ。

解答例

(1) n についての数学的帰納法で $2 \leqq a_n < 3$ を示す。
$n = 1$ のとき, $a_1 = 2$ であるから，$2 \leqq a_1 < 3$ が成り立つ。
$n = k$ のとき, $2 \leqq a_k < 3$ が成り立つと仮定する。
このとき，$\dfrac{3}{2} \geqq \dfrac{3}{a_k} > 1$ が成り立つ。したがって，$a_{k+1} = 4 - \dfrac{3}{a_k} \geqq 4 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2} > 2$, $a_{k+1} = 4 - \dfrac{3}{a_k} < 4 - 1 = 3$ である。
以上より，すべての自然数 n について，$2 \leqq a_n < 3$ が成り立つ。

(2) n についての数学的帰納法で $a_n < a_{n+1}$ を示す。
$n = 1$ のとき, $a_1 = 2$, $a_2 = \dfrac{5}{2}$ であるから，$a_1 < a_2$ が成り立つ。
$n = k$ のとき，$a_k < a_{k+1}$ が成り立つと仮定する。
このとき，(1) より $0 < 2 \leq a_n \leq a_{n+1} < 3$ だから，

$$\begin{aligned} a_{k+2} - a_{k+1} &= \left(4 - \frac{3}{a_{k+1}}\right) - \left(4 - \frac{3}{a_k}\right) \\ &= 3\left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \\ &> 0 \qquad \text{(数学的帰納法の仮定より)} \end{aligned}$$

以上より，すべての自然数 n について，$a_n < a_{n+1}$ が成り立つ。

(3) n についての数学的帰納法で $3 - a_n \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ を示す。
$n = 1$ のとき, $a_1 = 2$ であるから，$3 - a_1 = 1 = \dfrac{1}{2^{1-1}}$ が成り立つ。
$n = k$ のとき，$3 - a_k \leqq \dfrac{1}{2^{k-1}}$ が成り立つと仮定する。
このとき,

$$\begin{aligned} 3 - a_{k+1} &= 3 - \left(4 - \frac{3}{a_k}\right) = \frac{3}{a_k} - 1 = \frac{3 - a_k}{a_k} \\ &\leqq \frac{1}{a_k} \cdot \frac{1}{2^{k-1}} \qquad \text{(数学的帰納法の仮定より)} \\ &\leqq \frac{1}{2^k} \qquad \text{((1) より)} \end{aligned}$$

以上より，すべての自然数 n について，$3 - a_n \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ が成り立つ。

（教・生　数学I・A・II・B その3）

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計