平 成 29 年 度 入 学 者 選 抜 試 験

表紙（工学部・生命環境学部　数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲ）

(注 意 事 項)

1. 試験開始までに表紙の注意事項をよく読んでください。

2. 試験開始の合図があったら，すぐに種類と枚数が以下のとおりであることを確かめた上で，受験番号を８枚すべてに記入してください。

表紙		１枚
計算用紙　計算用紙１および計算用紙２	各１枚	計２枚
問題用紙		１枚
答案用紙（数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲその１）から（数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲその４）	各１枚	計４枚

3. 試験終了後，すべての用紙を回収します。

4. 配付された用紙が上記 2. と異なっているときや印刷が不鮮明なときは，手を挙げて監督者に知らせてください。

5. 出題された各問題に対する解答は，その問題番号が上部に印刷されている「答案用紙」に記入してください。
必要ならば，解答の続きを答案用紙の裏に書いてもかまいません。その場合，裏にも解答が書かれていることがはっきりと分かるように，表に書き示してください。

6. 「答案用紙」の右下隅にある小計の欄には何も記入してはいけません。

受 験 番 号

平 成 29 年 度 入 学 者 選 抜 試 験

計算用紙 1 (工学部・生命環境学部 数学I・A・II・B・III)

計算用紙は採点の対象になりません。必要事項は答案用紙に転記してください。

受 験 番 号

平 成 29 年 度 入 学 者 選 抜 試 験

計算用紙２ (工学部・生命環境学部 数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲ)

計算用紙は採点の対象になりません。必要事項は答案用紙に転記してください。

受 験 番 号

平　成　29　年　度　入　学　者　選　抜　試　験

問題用紙 (工学部・生命環境学部 数学I・A・II・B・III)

1　(1)　複素数平面上において，次の等式を満たす点 z 全体は，それぞれどのような図形か。

(A)　$\left|iz + 2 - 2\sqrt{3}\,i\right| = 4$

(B)　$|z| = \left|z - 2\sqrt{3} - 6i\right|$

(2)　$\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3}$ のとき，関数 $f(x) = \cos^2 x + 3\sin x + 1$ の最大値および最小値を求めよ。

(3)　n を自然数とするとき，$\left(1 + \sqrt[3]{2}\right)^n$ が整数 a_n, b_n および c_n を用いて，$a_n + b_n\sqrt[3]{2} + \dfrac{c_n}{\sqrt[3]{2}}$ と表されることを数学的帰納法によって証明せよ。

2　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。また，線分 OA を 3 : 1 に内分する点を D, △BCD の重心を G とする。

(1)　内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　直線 OG と平面 ABC の交点を E とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

(4)　線分 OG の長さ L を求めよ。

(5)　△OBG の面積 S を求めよ。

3　a を負でない定数とし，関数 $f(x)$ を $f(x) = \sin x - x + ax^3$ とする。

(1)　$f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$ を求めよ。

(2)　$x \geqq 0$ において，つねに $f''(x) \geqq 0$ となるような a の値の範囲を求めよ。

(3)　(2) で求めた範囲の a に対し，$x \geqq 0$ において，つねに $0 \leqq x - \sin x \leqq ax^3$ となることを証明せよ。

4　n を自然数とする。関数 $f(x)$ を $f(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$ とする。

(1)　$f(x)$ はつねに減少することを示せ。

(2)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{t(t+1)}\,dt$ を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$ を求めよ。また，不等式 $\displaystyle\int_0^n f(x)\,dx < \log 2$ を証明せよ。

(4)　不等式 $\dfrac{1}{e^1 + 1} + \dfrac{1}{e^2 + 1} + \dfrac{1}{e^3 + 1} + \cdots + \dfrac{1}{e^n + 1} < \log 2$ を証明せよ。

受　験　番　号

平成２９年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲその１）

1　(1)　（A）

$$\left|iz+2-2\sqrt{3}\,i\right| = \left|i\left(z+\frac{2-2\sqrt{3}\,i}{i}\right)\right| = |i|\left|z-2\sqrt{3}\ -2i\right| = \left|z-\left(2\sqrt{3}\ +2i\right)\right|$$

よって，$\left|z-\left(2\sqrt{3}\ +2i\right)\right|=4$

したがって求める図形は，点 $2\sqrt{3}+2i$ を中心とする半径 4 の円である。

（B）

原点と点 $2\sqrt{3}+6i$ を結ぶ線分の垂直二等分線。

---

(2)　$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ より，$f(x)=-\sin^2 x+3\sin x+2$ である。$X=\sin x$ とおくと，$\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{2\pi}{3}$ より，$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq X\leqq 1$ である。また，$f(x)$ を X で表すと

$$f(x)=-X^2+3X+2=-\left(X-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{4}$$

である。これより，$f(x)$ は $X=1$ のとき，最大値 4 をとり，$X=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，最小値 $\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$ をとる。$X=1$ のとき，$x=\frac{\pi}{2}$ であり，$X=\frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，$x=\frac{\pi}{4}$ であるから，$f(x)$ は $x=\frac{\pi}{2}$ のとき，最大値 4 をとり，$x=\frac{\pi}{4}$ のとき，最小値 $\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$ をとる。

---

(3)　数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき，$a_1=1, b_1=1, c_1=0$ とすれば成り立つので正しい。

[2] $n=k$ のとき，整数 a_k, b_k および c_k を用いて，$\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^k=a_k+b_k\sqrt[3]{2}+\frac{c_k}{\sqrt[3]{2}}$ と表されると仮定する。

$$\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^{k+1}=\left(a_k+b_k\sqrt[3]{2}+\frac{c_k}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(1+\sqrt[3]{2}\right)=(a_k+c_k)+(a_k+b_k)\sqrt[3]{2}+\frac{2b_k+c_k}{\sqrt[3]{2}}$$

$a_{k+1}=a_k+c_k, b_{k+1}=a_k+b_k, c_{k+1}=2b_k+c_k$ とすれば，これらは整数であり，$n=k+1$ のときにも成り立つ。

[1], [2] より，すべての自然数 n について，$\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^n$ は整数 a_n, b_n および c_n を用いて，$a_n+b_n\sqrt[3]{2}+\frac{c_n}{\sqrt[3]{2}}$ と表される。

数　　学その１
工　学　部・生命環境学部

受　験　番　号

小　　計

2

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

(2) G は△BCD の重心だから，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{4}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

(3) E は平面 ABC 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と書ける。
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$
一方，E は直線 OG 上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{k}{4}\vec{a}+\dfrac{k}{3}\vec{b}+\dfrac{k}{3}\vec{c}$
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は 1 次独立だから $1-s-t=\dfrac{k}{4}, s=t=\dfrac{k}{3}$
よって，$k=\dfrac{12}{11}, \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{1}{11}\left(3\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}\right)$

(4)
$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|^2&=\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)=\frac{1}{144}\left(3\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}\right)\cdot\left(3\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{144}\left(9\left|\vec{a}\right|^2+16\left|\vec{b}\right|^2+16\left|\vec{c}\right|^2+24\vec{a}\cdot\vec{b}+24\vec{a}\cdot\vec{c}+32\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{144}\left(9\cdot1+16\cdot1+16\cdot1+24\cdot\frac{1}{2}+24\cdot\frac{1}{2}+32\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{16}\end{aligned}$$
よって，$L=\dfrac{3}{4}$

(5) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\cdot1+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{8}$
(4) より，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|=\dfrac{3}{4}$
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot1^2-\left(\frac{5}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{11}}{16}$$

数　　　学その２
工　学　部・生命環境学部

受験番号

小　　計

平成２９年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・Ａ・Ⅱ・Ｂ・Ⅲその３）

3

(1)　$f'(x), f''(x), f'''(x)$ を求めると，

$$f'(x) = \cos x - 1 + 3ax^2, \quad f''(x) = -\sin x + 6ax, \quad f'''(x) = -\cos x + 6a$$

である。したがって，

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 6a - 1$$

である。

(2)　$6a \geqq 1$ のとき，$f'''(x) \geqq 0$ なので，$f''(x)$ は区間 $x \geqq 0$ で減少しない。
そして，$f''(0) = 0$ であるから，$x \geqq 0$ で $f''(x) \geqq 0$ である。
一方，$0 \leqq 6a < 1$ のときは，$f'''(x_0) = 6a - \cos x_0 = 0$ となる $0 < x_0 \leqq \dfrac{\pi}{2}$ が存在して，
$0 < x < x_0$ において $f'''(x) < 0$ となる。
つまり，区間 $0 < x < x_0$ において，$f''(x)$ は減少であり，$f''(0) = 0$ であるから，この区間で $f''(x) < 0$ である。
以上により，$x \geqq 0$ でつねに $f''(x) \geqq 0$ となる条件は，$6a \geqq 1$，つまり，$a \geqq \dfrac{1}{6}$ である。

(3)　$a \geqq \dfrac{1}{6}$ とする。
(2) により，$x \geqq 0$ において，$f''(x) \geqq 0$ であり，$f'(0) = 0$ だから，$f'(x) \geqq 0$ である。
したがって，$f(0) = 0$ より，$f(x) \geqq 0$ である。これより，$x \geqq 0$ で $x - \sin x \leqq ax^3$ である。
また，(2) の結果で，とくに $a = \dfrac{1}{6}$ とすると，$x \geqq 0$ で $f''(x) = x - \sin x \geqq 0$ である。

受　験　番　号

小　　　計

平成２９年度入学者選抜試験　答案用紙　（数学Ⅰ・A・Ⅱ・B・Ⅲその４）

4

(1)　$f'(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} < 0$ であるから，$f(x)$ はつねに減少する。

(2)　$\dfrac{1}{t(t+1)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{t+1}$ とおく．両辺に $t(t+1)$ を掛けて，整理すると $1 = (a+b)t + a$ となる。両辺の係数を比較すると，$a = 1,\, b = -1$ を得る。よって $\displaystyle\int \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \log|t| - \log|t+1| + C = \log\left|\frac{t}{t+1}\right| + C$（$C$ は積分定数）である。

(3)　$t = e^x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = e^x$，

x	0	$\to$	n
t	1	$\to$	e^n

より

$$\int_0^n f(x)\,dx = \int_1^{e^n} \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \left[\log\left|\frac{t}{t+1}\right|\right]_1^{e^n} = \log\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right) - \log\frac{1}{2} = \log\left(\frac{e^n}{e^n+1}\right) + \log 2$$

である。ここで，$0 < e^n < e^n + 1$ より，$0 < \dfrac{e^n}{e^n+1} < 1$ であるから，$\log\left(\dfrac{e^n}{e^n+1}\right) < 0$ である。よって，

$$\int_0^n f(x)\,dx < \log 2$$

である。

(4)　k を 1 以上の自然数とすると，(1) より区間 $[k-1, k]$ において

$$\frac{1}{e^k+1} = f(k) \leqq f(x)$$

が成立し，等号が成立するのは $x = k$ のときのみである。したがって

$$\frac{1}{e^k+1} = \int_{k-1}^k \frac{1}{e^k+1}\,dx < \int_{k-1}^k f(x)\,dx$$

である。この式で，$k = 1, 2, 3, \cdots, n$ として辺々加えると

$$\frac{1}{e^1+1} + \frac{1}{e^2+1} + \frac{1}{e^3+1} + \cdots + \frac{1}{e^n+1} < \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k f(x)\,dx = \int_0^n f(x)\,dx < \log 2$$

である。

受　験　番　号

小　　　計