平成 29 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教・生　数学 I・A・II・B 表紙）

教育学部・生命環境学部

・試験開始までに，表紙の注意事項をよく読んでください。
・筆記用具は，試験開始まで，手にとってはいけません。

（注　意　事　項）

1. 試験開始の合図の後，すぐに用紙の種類と枚数（4 枚）を確かめて，すべての用紙に受験番号を記入してください。この配布物には，次の計 4 枚が含まれています。

　平成 29 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教・生　数学 I・A・II・B 表紙）
　平成 29 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教・生　数学 I・A・II・B その 1）
　平成 29 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教・生　数学 I・A・II・B その 2）
　平成 29 年度入学者選抜試験問題並びに答案用紙　（教・生　数学 I・A・II・B その 3）

2. 試験終了後，配布されたすべての用紙を回収します。
3. 配布された用紙が上記 1. と異なっているときや印刷が不鮮明なときには，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 各「試験問題並びに答案用紙」の右下隅にある小計の欄には何も記入してはいけません。
5. 解答を書ききれないときは，その問題が記載してある用紙の裏面を利用してもかまいません。その場合は，問題記載の面の右下方に「裏面使用」と記入してください。

受 験 番 号

問題 1

(1) x, y が 3 つの不等式　$y \geqq x,\ \ y \leqq 2x,\ \ x+y \leqq 2$ を満たすとき, $2x+y$ の最大値を求めよ。

(2) $\triangle$ABC において, $\mathrm{AB}=c$, $\mathrm{BC}=a$, $\mathrm{CA}=b$ とする。$\cos \mathrm{A} = \dfrac{\sin \mathrm{C}}{2\sin \mathrm{B}}$ が成り立つとき, $\triangle$ABC はどのような三角形か。

(3) 不等式 $\log_2 x - \log_x 16 - 3 \leqq 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(4) 正の実数 x, y, z に対して, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x+y+z \geqq \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} \geqq \sqrt{x\sqrt{yz}}+\sqrt{y\sqrt{zx}}+\sqrt{z\sqrt{xy}}$$

また, それぞれの不等式において, 等号が成り立つときはどのようなときか。

解答例

(1) $y=x$ と $x+y=2$ の交点の座標は $(1,1)$ であり, この点を通る直線 $2x+y=k$ の切片 k は, $k=3$ である。
$y=2x$ と $x+y=2$ の交点の座標は $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ であり, この点を通る直線 $2x+y=k$ の切片 k は, $k=\dfrac{8}{3}<3$ である。
したがって, $2x+y$ は, $(x,y)=(1,1)$ のときに最大値 3 をとる。

(2) $\cos \mathrm{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\sin \mathrm{B} = \dfrac{b}{2R}$, $\sin \mathrm{C} = \dfrac{c}{2R}$ (外接円の半径を R とする) を $\cos \mathrm{A} = \dfrac{\sin \mathrm{C}}{2\sin \mathrm{B}}$ に代入して

$$\begin{aligned} \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} &= \frac{\frac{c}{2R}}{2\cdot\frac{b}{2R}} = \frac{c}{2b} \\ b^2+c^2-a^2 &= c^2 \end{aligned}$$

よって, $a^2=b^2$ である。すなわち, $a=b$ である。したがって, $\triangle$ABC は $\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ の二等辺三角形である。
逆に, $\triangle$ABC は $\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ の二等辺三角形のとき, $a=b$ より, $\cos \mathrm{A} = \dfrac{c}{2b}$ となり, $\cos \mathrm{A} = \dfrac{\sin \mathrm{C}}{2\sin \mathrm{B}}$ となる。

(3) $x>0$ であり, $\log_x 16$ より $x \fallingdotseq 1$ である。$X=\log_2 x$ とおくと, $X<0$ または $X>0$ であり, 与えられた式は,

$$X - \frac{\log_2 16}{X} - 3 = X - \frac{4}{X} - 3 \leqq 0$$

となる。
$X<0$ のとき, つまり, $0<x<1$ のとき, $X^2-3X-4=(X-4)(X+1) \geqq 0$ であるから, $X \leqq -1$ である。
$X>0$ のとき, つまり, $x>1$ のとき, $X^2-3X-4=(X-4)(X+1) \leqq 0$ であるから, $0<X \leqq 4$ である。
以上より, $0<x \leqq 2^{-1}=\dfrac{1}{2}$ または $1<x \leqq 2^4=16$ である。

(4) 相加相乗平均の関係より

$$\frac{x+y}{2}+\frac{y+z}{2}+\frac{z+x}{2} \geqq \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$$

であり, 左辺は $x+y+z$ なので, 最初の不等式が成り立つ。等号は $x=y=z$ のときに成り立つ。
この不等式で x, y, z に $\sqrt{xy}, \sqrt{yz}, \sqrt{zx}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} &\geqq \sqrt{\sqrt{xy}\sqrt{yz}}+\sqrt{\sqrt{yz}\sqrt{zx}}+\sqrt{\sqrt{zx}\sqrt{xy}} \\ &= \sqrt{x\sqrt{yz}}+\sqrt{y\sqrt{zx}}+\sqrt{z\sqrt{xy}} \end{aligned}$$

となり二つ目の不等式を得る。等号条件は $\sqrt{xy}=\sqrt{yz}=\sqrt{zx}$, 即ち $x=y=z$ である。

（教・生　数学 I・A・II・B その 1）

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計

問題 2　$t > 0$ とする。xy 平面の $0 \leqq x \leqq t$ の範囲で, 曲線 $y = x(x-2)$ と x 軸の間の部分の面積を $S(t)$ とする。

(1) $S(t)$ を求めよ。

(2) ty 平面で, 曲線 $y = S(t)$ 上の点 $(a, S(a))$ （ただし, $a \fallingdotseq 2$) での接線が直線 $y = 3t + b$ (b は定数) となるとき, b の値を求めよ。

(3) (2) で求めた b について, $S(t) \geqq 3t + b$ が成り立つことを示せ。

解答例

(1) $S(t) = \displaystyle\int_0^t |x(x-2)|\,dx$ であるから,

$0 < t \leqq 2$ のとき, $S(t) = -\displaystyle\int_0^t x(x-2)\,dx = -\frac{1}{3}t^3 + t^2$, $S(2) = \dfrac{4}{3}$

$t \geqq 2$ のとき, $S(t) = \displaystyle\int_2^t x(x-2)\,dx + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + \frac{8}{3}$

(2) $a \fallingdotseq 2$ での $y = S(t)$ の接線の傾きが 3 である。

$0 < a < 2$ のとき, $S'(a) = -a(a-2) = -(a-1)^2 + 1 \leqq 1$ であり, $S'(a) = 3$ とはなりえない。

$2 < a$ のとき, $S'(a) = a(a-2) = a^2 - 2a = 3$ とすると, $a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3) = 0$ となり, $a > 2$ のとき, $a = 3$ である。

したがって, 接線の方程式は $y - S(3) = 3(t-3)$ であるから, $S(3) = \dfrac{8}{3}$ より,

$$\begin{aligned} y &= 3t - 9 + \frac{8}{3} \\ &= 3t - \frac{19}{3} \end{aligned}$$

故に, $b = -\dfrac{19}{3}$ である。

(3) $g(t) = S(t) - (3t + b) = S(t) - \left(3t - \dfrac{19}{3}\right)$ とおくと, $g(2) = \dfrac{5}{3} > 0$, $g(3) = 0$ である。

$0 < t < 2$ のとき,

$$g'(t) = -t(t-2) - 3 = -(t^2 - 2t + 3) = -(t-1)^2 - 2 < 0$$

であるから, $g(2) > 0$ より, $0 < t \leqq 2$ では, $g(t) > 0$ となる。

$2 < t$ のとき,

$$g'(t) = t(t-2) - 3 = (t+1)(t-3)$$

であるから, $t = 3$ のときに極小値 $g(3) = 0$ をとる。したがって, $t > 2$ では $g(t) \geqq 0$ である。

以上より, $0 < t$ のとき $g(t) \geqq 0$ であり, $S(t) \geqq 3t + b$ である。

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計

問題 3 △OAB において, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし, $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=2\sqrt{2}$, $\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|=6$ とする。さらに, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とする。ただし, s, t は実数とする。
(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直であるとき, s と t の関係式を求めよ。
(3) 点 H が △OAB の垂心であるとき, s と t の値を求めよ。

解答例

(1)

$$\begin{aligned}\left|2\vec{a}-\vec{b}\right|^2&=6^2\\4\left|\vec{a}\right|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+\left|\vec{b}\right|^2&=36\\4\times3^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+(2\sqrt{2})^2&=36\\36-4\vec{a}\cdot\vec{b}+8&=36\\\vec{a}\cdot\vec{b}&=2\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$ が垂直なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=0$$

また, (1) より $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$ だから, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)&=\left(s\vec{a}+t\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\\&=-s\left|\vec{a}\right|^2+t\left|\vec{b}\right|^2+(s-t)\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=-9s+8t+2(s-t)\\&=-7s+6t\end{aligned}$$

よって, $-7s+6t=0$ である。したがって, $s=\dfrac{6}{7}t$ である。
(3) H が △OAB の垂心であるとき, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ である。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\left(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\vec{b}\\&=\left\{(s-1)\vec{a}+t\vec{b}\right\}\cdot\vec{b}\\&=(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t\left|\vec{b}\right|^2\\&=2(s-1)+8t\end{aligned}$$

よって, $2(s-1)+8t=0$。したがって, $s+4t=1$ である。これと (2) で求めた $s=\dfrac{6}{7}t$ より,

$$\frac{6}{7}t+4t=1,\qquad 6t+28t=7$$

よって, $t=\dfrac{7}{34}$, $s=\dfrac{7}{34}\times\dfrac{6}{7}=\dfrac{3}{17}$ である。

（解答を書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。）

受 験 番 号

小　計